På följande sidor följer de utdelade uppgifter som jag ej hann räkna på lektionerna, samt några ytterligare gamla tentauppgifter som jag hade räknat ut före.

Angående en fråga på lektionen om hur noga man skall motivera varje steg i en lösning så glömde jag lägga till att en viktig fördel med att redovisa utförligt hur man tänkt är att gör man något slarvfel men har tänkt rätt så kan man få poäng ändå.
En kort kort motivering som "Handpåläggning ger: A=1, B=7, C=-3" ger t ex poäng så länge man räknar allt rätt, men blir någon siffra fel så framgår ju inte om man tänkte rätt, fel eller bara gissade, så då får man garanterat poängavdrag. Gör man en utförligare motivering så att det framgår att man vet precis hur handpåläggningsmetoden fungerar och bara råkade göra något litet slarvfel så kan det ge mindre poängavdrag eller i bästa fall, om allt annat är rätt och beroende på vem som rättar, bara en anmärkning om slarvfel.
(Enda bombsäkra sättet att få alla rätt är som vanligt att räkna rätt och redovisa så det går att följa hur man tänkt.)

2

Problem 5:

a) Evaluate
$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}dx, \text{ if possible.}$$

b) Evaluate
$$\frac{d}{dx}\left(x\int_1^x te^{t^2}dt\right) \text{ and } \frac{d}{dx}\left(x\int_x^1 te^{t^2}dt\right).$$

c) 1) Evaluate $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \, dx$.

2) Find the **area** of the region bounded by the x-axis and the graph of the function $y = \sin x$, from $x = -\pi$, to $x = \pi$.

3) Evaluate without calculation: $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (x^3 + \sin x \sin x^2 - x\sin^2 x - x^5 + x\cos x)dx$

4) Evaluate: $\int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} (\sin^7 x \cos x - x + x\sin x)dx$

Note (för de som har glömt, för de som inte visste och för de som inte visste och även har glömt): *a product of two odd functions is an even function; a product of an even function and an odd function is an odd function; composition of an odd function with an even function is an even function*.

a) $\frac{1}{x^2} \to \infty$ då $x \to 0$ så vi kan inte räkna ut integralen på hela intervallet $[-1,0]$ utan bara på mindre intervall $[-1,c]$, $c<0$, och sedan ta gränsvärde då $c \to 0-$.

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{c\to 0-}\int_{-1}^{c} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{c\to 0-} \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_{-1}^{c} = \lim_{c\to 0-}\left(\underbrace{-\frac{1}{c}}_{\to -\infty} - \left(-\frac{1}{-1}\right)\right) = \infty.$$

SVAR: Integralen divergerar.

b) För $g(x) = \int_1^x te^{t^2}dt$ så vet vi att $g'(x) = x e^{x^2}$

$$\frac{d}{dx}\left(x\int_1^x te^{t^2}dt\right) = \frac{d}{dx}(x\cdot g(x)) = 1\cdot g(x) + x\cdot g'(x) = \frac{1}{2}\int_1^x \underbrace{2te^{t^2}}_{=\frac{d}{dt}(e^{t^2})}dt + x^2e^{x^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{t^2}\right]_1^x + x^2e^{x^2} = \frac{1}{2}\left(e^{x^2} - e^1\right) + x^2e^{x^2} = \left(\frac{1}{2}+x^2\right)e^{x^2} - \frac{e}{2}$$

SVAR: $\frac{d}{dx}\left(x\int_1^x te^{t^2}dt\right) = \left(\frac{1}{2}+x^2\right)e^{x^2} - e^2$

och

$$\frac{d}{dx}\left(x\int_x^1 te^{t^2}dt\right) = \frac{d}{dx}\left(-x\int_1^x te^{t^2}dt\right) = -\left(\frac{1}{2}+x^2\right)e^{x^2} + e^2.$$

c) För udda funktioner $f(x)$, dvs sådana att $f(-x) = -f(x)$ så gäller att $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

$\sin(x)$ är udda, och om $g(x) = x^3 + \sin(x)\cdot\sin(x^2) - x\sin^2(x) - x^5 + x\cos(x)$ så följer att

$$g(-x) = \underbrace{(-x)^3}_{=-x^3} + \underbrace{\sin(-x)}_{=-\sin(x)}\cdot\sin(\underbrace{(-x)^2}_{=x^2}) - (-x)\cdot\underbrace{\sin^2(-x)}_{=\sin^2(x)} - \underbrace{(-x)^5}_{=-x^5} + (-x)\cdot\underbrace{\cos(-x)}_{=\cos(x)} = -g(x)$$

Alltså är g udda!

Från detta får vi

1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\,dx = 0$

3) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(x^3 + \sin(x)\cdot\sin(x^2) - x\cdot\sin^2(x) - x^5 + x\cos(x)\right) dx = 7.$

På samma sätt, om $h(x) = \sin^7(x)\cos(x) - x$ och $u(x) = x\cdot\sin(x)$, så är

$$h(-x) = \underbrace{(\sin(-x))^7}_{=-\sin^7(x)}\,\underbrace{\cos(-x)}_{=\cos(x)} - (-x) = -h(x) \quad \text{och}$$

$$u(-x) = (-x)\cdot\underbrace{\sin(-x)}_{=-\sin(x)} = x\sin(x) = u(x)$$ är en jämn funktion. Detta ger

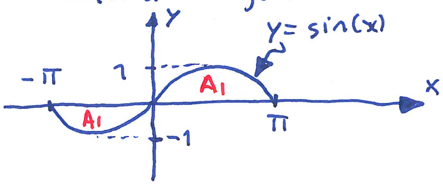
4) $$\int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} \left(\sin^7(x)\cos(x) - x + x\sin(x)\right)dx = \underbrace{\int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} \left(\sin^7(x)\cos(x) - x\right)dx}_{=0} + \int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} x\sin(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} x\sin(x)\,dx = 2\int_0^{\sqrt{\pi}} \underbrace{x}_{f(x)}\,\underbrace{\sin(x)}_{g'(x)} \overset{\text{partiell integration}}{=} 2\left(\Big[\underbrace{x}_{f(x)}\cdot\underbrace{(-\cos(x))}_{g(x)}\Big]_0^{\sqrt{\pi}} - \int_0^{\sqrt{\pi}} \underbrace{1}_{f'(x)}\cdot\underbrace{(-\cos(x))}_{g(x)}\,dx\right) =$$

$$= -2\sqrt{\pi}\cos(\sqrt{\pi}) + 2\Big[\sin(x)\Big]_0^{\sqrt{\pi}} = \underline{\underline{2\left(\sin(\sqrt{\pi}) - \sqrt{\pi}\cos(\sqrt{\pi})\right)}}$$

Återstår areaberäkningen:

2)



Totala arean instängd mellan $y = \sin(x)$ och x-axeln för $-\pi \le x \le \pi$ är

$$A = 2A_1 = 2\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx = 2\Big[-\cos(x)\Big]_0^{\pi} = 2\left(-\cos(\pi) + \cos(0)\right) = \underline{\underline{4 \text{ areaenheter}}}$$

4

Problem 6: Evaluate the following integrals:

a) $\int_0^1 e^x \cos(\pi x) dx$

b) $\int \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x} dx$.

a) Partiell integration:

$$I = \int_0^1 \underset{f'(x)}{e^x} \underset{g(x)}{\cos(\pi x)}\, dx = [\underset{f(x)}{e^x} \underset{g(x)}{\cos(\pi x)}]_0^1 - \int_0^1 e^x \cdot (-\pi \sin(\pi x))\, dx$$

$$= e^1 \cdot (-1) - e^0 \cdot 1 + \pi \int_0^1 \underset{f'(x)}{e^x} \underset{g(x)}{\sin(\pi x)}\, dx = -e - 1 + \pi \Big(\underbrace{[\underset{f(x)}{e^x} \underset{g(x)}{\sin(\pi x)}]_0^1}_{=0} - \int_0^1 \underset{f(x)}{e^x} \cdot \underset{g'(x)}{\pi \cos(\pi x)}\, dx \Big) =$$

$$= -e - 1 - \pi^2 \int_0^1 e^x \cos(\pi x)\, dx$$

$$I = -e - 1 - \pi^2 I$$

$$(1+\pi^2)\, I = -e - 1$$

SVAR: $I = -\dfrac{1+e}{1+\pi^2}$

b) $x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1) = x(x+1)^2$

Partialbråksuppdelning. (Handpåläggning funkar bara med faktorer $(x-x_n)$ i nämnaren.)

$$\frac{5x^2+20x+6}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx}{x(x+1)^2} =$$

$$= \frac{A(x^2+2x+1) + B(x^2+x) + Cx}{x(x+1)^2} = \frac{(A+B)x^2 + (2A+B+C)x + A}{x(x+1)^2}$$

Ur detta fås

$A = 6$

$A + B = 5 \Rightarrow B = 5 - A = -1$

$2A + B + C = 20 \Rightarrow C = 20 - 2A - B = 20 - 12 + 1 = 9$

Alltså blir

$$\int \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x} dx = \int \left(\frac{6}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{9}{(x+1)^2}\right) dx = 6 \ln(|x|) - \ln(|x+1|) + 9 \frac{(x+1)^{-1}}{-1}$$

SVAR: $\int \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x} dx = 6 \ln(|x|) - \ln(|x-1|) - \frac{9}{x+1} + C$

Problem 6: Evaluate the following integrals:

a) $\int_0^1 e^x \cos(\pi x)dx$

b) $\int_0^1 \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}dx$.

"Bonusuppgift": Jag råkade först räkna med samma integrationsgränser i b) som i a) och då blev det som nedan.

a) Partiell integration:

$$I = \int_0^1 \underbrace{e^x}_{f'(x)} \underbrace{\cos(\pi x)}_{g(x)} dx = \left[\underbrace{e^x}_{f(x)} \underbrace{\cos(\pi x)}_{g(x)}\right]_0^1 - \int_0^1 e^x \cdot (-\pi \sin(\pi x))\, dx$$

$$= e^1 \cdot (-1) - e^0 \cdot 1 + \pi \int_0^1 \underbrace{e^x}_{f'(x)} \underbrace{\sin(\pi x)}_{g(x)} dx = -e - 1 + \pi\left(\underbrace{\left[\underbrace{e^x}_{f(x)} \underbrace{\sin(\pi x)}_{g(x)}\right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 \underbrace{e^x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\pi\cos(\pi x)}_{g'(x)} dx\right) =$$

$$= -e - 1 - \pi^2 \int_0^1 e^x \cos(\pi x)\, dx$$

$$I = -e - 1 - \pi^2 I$$

$$(1+\pi^2) I = -e - 1$$

SVAR: $I = -\dfrac{1+e}{1+\pi^2}$

b) $x^3 + 2x^2 + x = x(x^2+2x+1) = x(x+1)^2$

Partialbråksuppdelning. (Handpåläggning funkar bara med faktorer $(x-x_n)$ i nämnaren.)

$$\frac{5x^2+20x+6}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx}{x(x+1)^2} =$$

$$= \frac{A(x^2+2x+1) + B(x^2+x) + Cx}{x(x+1)^2} = \frac{(A+B)x^2 + (2A+B+C)x + A}{x(x+1)^2}$$

Obs! Hade gått att avbryta partialbråksuppdelningen och redan här motivera att $A \neq 0$ ty annars fås fel nämnare och $\int \frac{A}{x} dx = A \ln(x)$, så $\int_0^1 \frac{A}{x} dx$ divergerar medan integral av övriga termer konvergerar, så $\int_0^1 \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x} dx$ divergerar.

Ur detta fås

$A = 6$

$A + B = 5 \Rightarrow B = 5 - A = -1$

$2A + B + C = 20 \Rightarrow C = 20 - 2A - B = 20 - 12 + 1 = 9$

$$\int_0^1 \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x} dx = \lim_{c \to 0+} \int_c^1 \left(\frac{6}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{9}{(x+1)^2}\right) dx = \lim_{c \to 0+} \left[6 \cdot \ln(|x|) - \ln(|x+1|) + 9\frac{(x+1)^{-1}}{-1}\right]_c^1 =$$

$$= 6 \cdot \ln(1) - \ln(2) - \frac{9}{2} - \lim_{c \to 0+}\left(6 \underbrace{\ln(c)}_{\to -\infty} - \underbrace{\ln(c+1)}_{\to 0} - \underbrace{9\frac{1}{c+1}}_{\to 9}\right) = \infty$$

SVAR: Integralen divergerar

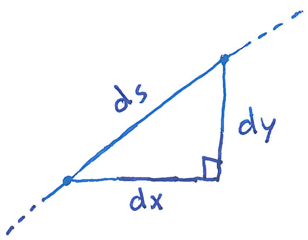
Problem 7: Consider the following parameterized curve:

$$x = \frac{1}{2}t^2, \quad y = \frac{1}{3}t^3, \quad 0 \le t \le 2.$$

a) Find the length of the given curve.

b) Find the equation of the tangent to the above curve at the point (x_0, y_0), which corresponds to the parameter value $t = 1$.

a) $\begin{cases} x = \frac{t^2}{2} = f(t) \\ y = \frac{t^3}{3} = g(t) \end{cases}$, $\quad 0 \leq t \leq 2$ $\qquad ds^2 = dx^2 + dy^2$



$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\left(\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right)dt^2} = \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}\,dt = \sqrt{t^2 + t^4}\,dt$$

Kurvans längd är

$$s = \int ds = \int_0^2 \sqrt{t^2 + t^4}\,dt = \int_0^2 \sqrt{t^2(1+t^2)}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^2 2t\sqrt{1+t^2}\,dt = \left[\begin{array}{l} u = 1+t^2 \\ du = 2t\,dt \\ t=0 \Leftrightarrow u=1 \\ t=2 \Leftrightarrow u=5 \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^5 u^{1/2}\,du = \frac{1}{2}\left[\frac{u^{3/2}}{3/2}\right]_1^5 = \frac{1}{3}\left[u^{3/2}\right]_1^5 = \frac{5^{3/2} - 1}{3}.$$

SVAR: $\frac{5^{3/2} - 1}{3}$ längdenheter.

b) Tangentens ekvation är

$\begin{cases} x = f(1) + f'(1)(t-1) \\ y = g(1) + g'(1)(t-1) \end{cases}$ $\quad$ med $f'(t) = t$ och $g'(t) = t^2$, dvs,

SVAR: $\begin{cases} x = \frac{1}{2} + t - 1 = t - \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{3} + t - 1 = t - \frac{2}{3} \end{cases}$

Tentamen i Matematik 2: M0030M.

Datum: 2012-08-24
Skrivtid: 09:00–14:00
Antal uppgifter: 6 (30 poäng).
Examinator: Norbert Euler
Telefon: 0920-492878

Tillåtna hjälpmedel: Inga

Till alla uppgifterna skall fullständiga lösningar lämnas.
Resonemang och uträkningar ska vara tydligt presenterade.
Även endast delvis lösta problem kan ge poäng.
Enbart svar ger 0 poäng.
Betygsgränser: $14p - 19p = \mathbf{3}$; $20p - 24p = \mathbf{4}$; $25p - 30p = \mathbf{5}$.

Uppgift 1: Betrakta följande vektorerna i $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Bestäm det eller de värden på h så att vektor

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ h \end{pmatrix}$$

tillhör mängden Span$\{\mathbf{v}_1, \ \mathbf{v}_2, \ \mathbf{v}_3\}$.

b) Bestäm ekvationen för planet i $\mathbb{R}^3$ som spänns upp av $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ om ett sådant finns.

[5 poäng]

a) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -3 & -4 \\ -1 & -4 & 1 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & h \end{array}\right) \begin{array}{l} (2)+(1) \\ (3)+2\cdot(1) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & h-8 \end{array}\right) \sim_{(3)-3\cdot(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & h-5 \end{array}\right)$$

Lösbart för $h=5$.

b) $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ ligger i samma plan om det finns c_1, c_2, c_3 så att

$$c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + c_3\bar{v}_3 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -3 & 0 \\ -1 & -4 & 1 & 0 \\ -2 & -7 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Lösbart!

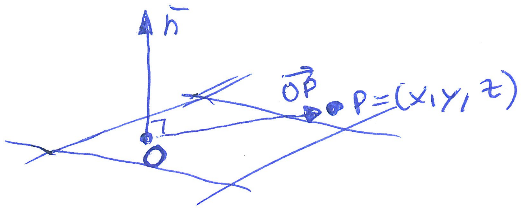
vektorerna ligger alltså i samma plan. Normalvektor

Normalvektor: $\bar{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-8 \\ -10+7 \\ -4+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{matrix} 1 & & 5 \\ -1 & & -4 \end{matrix}$

⑧

Ingen punkt i planet ges. Underförstått att det är plan genom origo.



Planets ekvation: $\bar{n} \cdot \vec{OP} = 0$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

SVAR: $-x - 3y + z = 0$

Uppgift 2:

a) Ange en parameterframställning av linjen

$$x + y + z = 2$$
$$3x - y = 1.$$

b) Ovanstående linje skär planet $x - 2y + z = 0$ i en punkt. Bestäm denna.

c) Bestäm avståndet från punkten $P = (1, 3, 2)$ till planet $2x - y + 3z = 3$.

[5 poäng]

a) Låt x vara fri parameter: $x = t$

De givna ekvationerna ger: $y = 3t - 1$

$z = 2 - x - y = 2 - t - (3t - 1) = 1 - 4t$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 3t-1 \\ 1-4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

b) Gäller hitta (x,y,z) som uppfyller alla tre ekvationerna.

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - 2y + z = 0 \\ 3x - y = 1 \end{cases} \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (2)-(1) \\ (3)-3\cdot(1) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & -3 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ 3\cdot(3)-4\cdot(2) \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array}$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -9 & -7 \end{array}\right)$$

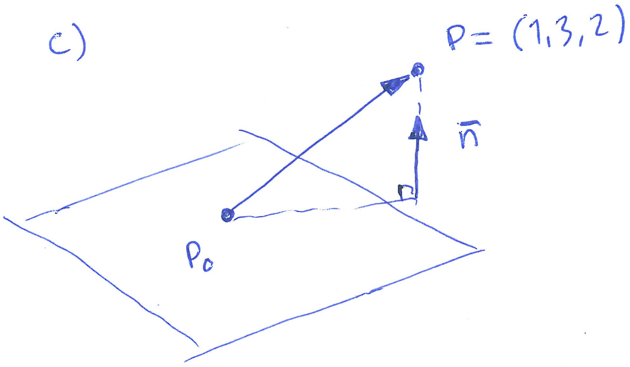
$z = \frac{7}{9}$

$y = \frac{2}{3}$

$x = 2 - y - z = 2 - \frac{2}{3} - \frac{7}{9} = \frac{18 - 6 - 7}{9} = \frac{5}{9}$

SVAR: $(x,y,z) = \left(\frac{5}{9}, \frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right)$

c)



lanets ekvation: $2x - y + 3z = 3$ (*)

Planets normalvektor: $\bar{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Punkt i planet: sätt $x = y = 0$ i (*) så fås $3z = 3$, $z = 1$

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{P_0 P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Avstånd från P till planet:

$$d = \frac{\overrightarrow{P_0 P} \bullet \bar{n}}{|\bar{n}|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}}{\sqrt{4+1+9}} = \frac{2-3+3}{\sqrt{14}}$$

SVAR: $\frac{2}{\sqrt{14}}$ längdenheter.

Uppgift 3: Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & a & 2 \\ 1 & -2 & -a \end{pmatrix}.$$

OBS! Gör man a) med Gauss-eliminering så måste man hålla tungan rätt i mun när och göra radbyte för att få rätt med pivåelementen även om $a = 0$.

a) För vilka värden på a har ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, med $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, en entydig lösning?

b) Beräkna A^{-1} för ovanstående matris då $a = 1$.

[5 poäng]

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & a & 2 \\ 1 & -2 & -a \end{pmatrix} \underset{(3)-(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & a & 2 \\ 0 & -4 & -2a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & -4 & -2a \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix} \underset{4\cdot(3)+a\cdot(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & -4 & -2a \\ 0 & 0 & 8-2a^2 \end{pmatrix}$

För att få entydig lösning med vilket b som helst inlagt som högerled och fjärde kolumn, så krävs att $8 - 2a^2 \neq 0$

Enklare alternativ: Krävs att $0 \neq \det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} a & 2 \\ -2 & -a \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & a \\ a & 2 \end{vmatrix} = -a^2 + 4 + 4 - a^2 = 8 - 2a^2$

SVAR: $a \neq \pm 2$

10

b) $(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ (2)-(1) \\ \\ \end{array}$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{4\cdot(3)+(2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} 6\cdot(1)-(3) \\ 3\cdot(2)+(3) \\ \\ \end{array}$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 12 & 0 & 7 & -4 & -1 \\ 0 & -12 & 0 & -4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right) \underset{}{\overset{(1)+(2)}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & -12 & 0 & -4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \cdot\frac{1}{6} \\ \cdot(-\frac{1}{12}) \\ \cdot(-\frac{1}{6}) \end{array} \sim$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array}\right)$

SVAR: $A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ -4 & -4 & -4 \\ -2 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

Uppgift 4: Beräkna följande

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x+6}{x^2+3x}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{2}\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}\,dx$ Tip: Låt $u = \sqrt{x}$.

[5 poäng]

a) $\frac{x+6}{x^2+3x} = \frac{x+6}{x(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3}$

Handpåläggning ger: $A = \frac{6}{3} = 2$, $B = \frac{3}{-3} = -1$

$I = \int_1^2 \frac{x+6}{x^2+3x}\,dx = \int_1^2 \left(\frac{2}{x} \quad \frac{1}{x+3}\right) dx =$

$= \Big[2\cdot\ln(|x|) - \ln(|x+3|)\Big]_1^2 = 2\ln(2) - \ln(5) - 2\ln(1) + \ln(4) =$

$= \underbrace{2\ln(2)}_{=\ln(2^2)=\ln(4)} + \ln(4) - \ln(5) = \underline{\underline{2\ln(4) - \ln(5)}}$

Räknas ut med 2 x partiell integration

b) $\int \frac{1}{2}\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}\,dx = \int x\,e^{\sqrt{x}}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \left[\begin{array}{l} u = \sqrt{x} \\ du = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} \end{array}\right] = \int \underset{f(u)}{u^2}\,\underset{g'(u)}{e^u}\,du =$

$= u^2e^u - \int 2ue^u du = u^2e^u - \left(2ue^u - \int 2e^u du\right) = (u^2-2u)e^u + 2e^u + C$

$= (u^2 - 2u + 2)e^u + C = \underline{\underline{(x - 2\sqrt{x} + 2)e^{\sqrt{x}} + C}}$

Uppgift 5:

a) Vad blir arean av det begränsade området mellan kurvorna

$$\underbrace{y = \frac{4}{\sqrt{x+1}}}_{= f(x)}, \qquad y = \underbrace{x-1}_{=g(x)}, \quad \text{och} \quad y-\text{axeln.}$$

b) Vad blir längden av kurvan

$$y = x^{3/2}, \qquad 0 \le x \le 4.$$

[5 poäng]

a) Notera ovan att $f(x)$ är strängt avtagande och $g(x)$ är strängt växande. Alltså finns exakt en skärningspunkt för $x>0$:

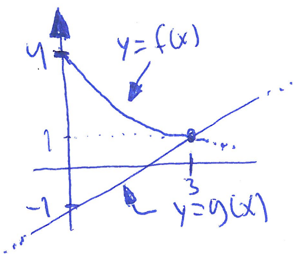
$$\frac{4}{\sqrt{x+1}} = x-1$$

$$4 = (x-1)\sqrt{x+1} \qquad (*)$$

$$16 = (x^2-2x+1)(x+1) = x^3-2x^2+x+x^2-2x+1$$

$$16 = x^3-x^2-x+1$$

Gissning på heltalslösning nära 0 (kanske enklast i (*)) ger att den sökta skärningspunkten är $x=3$



Den sökta arean är

$$A = \int_0^3 (f(x)-g(x))\,dx = \int_0^3 \left(\frac{4}{\sqrt{x+1}} - (x-1)\right)dx =$$

$$= \left[4\cdot\frac{(x+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \frac{x^2}{2} + x\right]_0^3 = \left[8\sqrt{x+1} - \frac{x^2}{2} + x\right]_0^3 = 8\cdot 2 - \frac{9}{2} + 3 =$$

$$= 19 - \frac{9}{2} = \frac{38-9}{2} = \underline{\underline{\frac{31}{2} \text{ areaenheter}}}$$

b) $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{(1+(\frac{dy}{dx})^2)\,dx^2} = \sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\,dx$

$ds = \sqrt{1+(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}})^2}\,dx = \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx$. Kurv

Kurvlängden blir

$$s = \int ds = \int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx = \left[\begin{array}{l} u = 1+\frac{9}{4}x \\ du = \frac{9}{4}dx \\ x=0 \Leftrightarrow u=1 \\ x=4 \Leftrightarrow u=10 \end{array}\right] = \int_1^{10} u^{1/2}\,du = \left[\frac{u^{3/2}}{3/2}\right]_1^{10} = \frac{2}{3}(10^{\frac{3}{2}}-1)$$

SVAR: $\frac{2}{3}(10^{3/2}-1)$ längdenheter.

Glömde faktorn 4/9 efter variabelbytet, så muliplicera med 4/9 för korrekt svar.

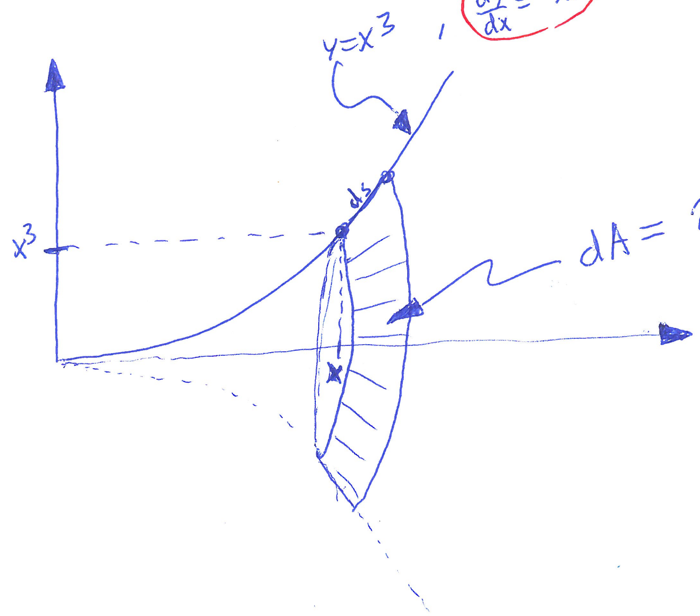
(12)

Uppgift 6:
Om man låter kurvan $y = x^3$, $0 \leq x \leq 1$, rotera ett varv kring x-axeln bildas en rotationsyta. Beräkna rotationsytans area.

[5 poäng]

Vi hade inga uppgifter på sådana area i år (finns i avsnitt 7.3 i Adams) men som i förra uppgiften är ett längdelement för kurvan $ds = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$ och rotationsytan kan byggas upp av "remsor" (areaelement) som i denna figur:

$\frac{dy}{dx} = 3x^2$



$dA = 2\pi x^3 ds = 2\pi x^3 \sqrt{1+9x^4}$

Den sökta arean är då

$$A = \int_0^1 dA = 2\pi \frac{1}{36}\int_0^1 36x^3\sqrt{1+9x^4}\,dx = \left[\begin{array}{l} u = 1+9x^4 \\ du = 36x^3dx \\ x=0 \Leftrightarrow u=1 \\ x=1 \Leftrightarrow u=10 \end{array}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{18}\int_1^{10} u^{1/2}du = \frac{\pi}{18}\left[\frac{u^{3/2}}{3/2}\right]_1^{10} = \frac{\pi}{27}\left[u^{3/2}\right]_1^{10} = \frac{\pi}{27}\left(10^{3/2}-1\right)$$

SVAR: $\frac{\pi}{27}\left(10^{3/2}-1\right)$

3