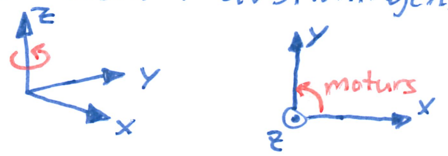
Lektion 16

Uppgift 1 (liknande de i Avsnitt 4.2 i Euler & Euler)

a) Låt T_1 vara avbildningen som reflekterar varje $\bar{v} \in \mathbb{R}^3$ i linjen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Bestäm avbildningens standardmatris A_1.

b) Låt T_2 vara avbildningen som roterar varje vektor i $\mathbb{R}^3$ motturs φ radianer runt z-axeln. Bestäm avbildningens standardmatris A_2



c) (Problem 4.2.10 a)) Låt T_3 vara avbildningen som gör ortogonal vektorprojektion av varje vektor i $\mathbb{R}^3$ på planet

$$ax + by + cz = 0$$

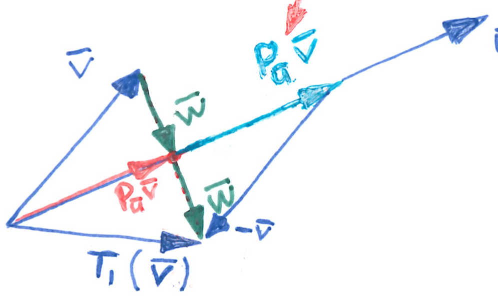
Bestäm avbildningens standardmatris A_3.

d) Räkna med Maple ut standardmatriserna för $T_1 \circ T_2 \circ T_3$, $T_1 \circ T_3 \circ T_2$, $T_2 \circ T_1 \circ T_3$, $T_2 \circ T_3 \circ T_1$, $T_3 \circ T_1 \circ T_2$ och $T_3 \circ T_2, T_1$ i specialfallet $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$P_{\bar{u}}\bar{v}$ = Vektorprojektionen av $\bar{v}$ på $\bar{u}$

Lösningar

a)



$\bar{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\quad \hat{u} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$P_{\bar{u}}\bar{v} = (\bar{v} \cdot \hat{u})\,\hat{u} = \frac{1}{a^2+b^2+c^2} (\bar{v} \cdot \bar{u})\,\bar{u}$$

$$\bar{w} = P_{\bar{u}}\bar{v} - \bar{v}$$

$$T_1(\bar{v}) = \bar{v} + 2\bar{w} = \bar{v} + 2(P_{\bar{u}}\bar{v} - \bar{v}) = \bar{v} + 2P_{\bar{u}}\bar{v} - 2\bar{v} = 2P_{\bar{u}}\bar{v} - \bar{v}$$

$$\bar{v} = \bar{e}_1 \Rightarrow P_{\bar{u}}\bar{e}_1 = \frac{1}{a^2+b^2+c^2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{a}{a^2+b^2+c^2} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$T_1(\bar{e}_1) = \frac{2a}{a^2+b^2+c^2} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

(2) På samma sätt blir

$$T_1(\bar{e}_2) = \frac{2b}{a^2+b^2+c^2}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T_1(\bar{e}_3) = \frac{2c}{a^2+b^2+c^2}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

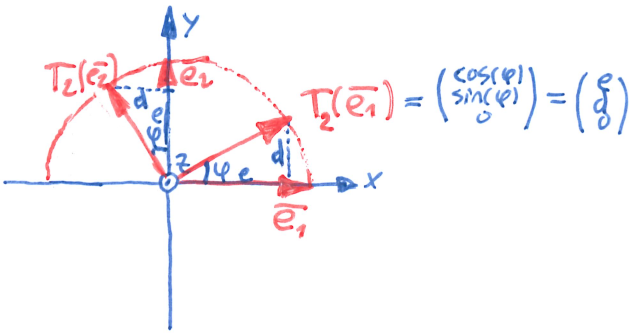
SVAR: $A_1 = \begin{pmatrix} T_1(\bar{e}_1) & T_1(\bar{e}_2) & T_1(\bar{e}_3) \end{pmatrix}$

med kolumnvektorer givna i (1) och (2)

(b) Vi har $T_2(\bar{e}_3) = \bar{e}_3$,

$$T_2(\bar{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ d \\ 0 \end{pmatrix}$$

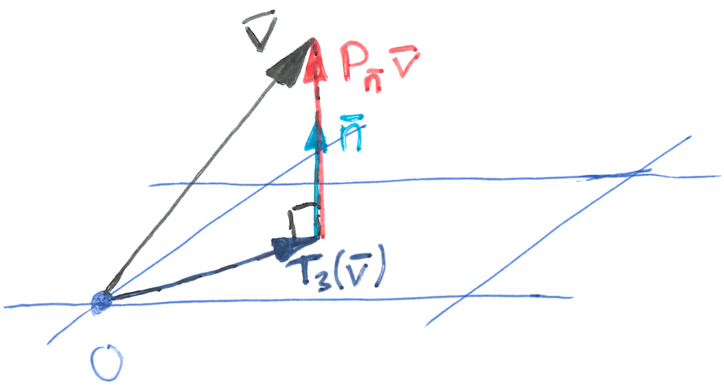
$$T_2(\bar{e}_2) = \begin{pmatrix} -d \\ e \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$



SVAR: $A_2 = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) Planet har normalvektor $\bar{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

och $O = (0,0,0)$ är en punkt i planet



För godtycklig vektor $\bar{v} \in \mathbb{R}^3$ är

$$P_{\bar{n}}\bar{v} = (\bar{v} \cdot \hat{n})\,\hat{n} = \frac{1}{a^2+b^2+c^2}(\bar{v} \cdot \bar{n})\,\bar{n}$$

$$T_3(\bar{v}) = \bar{v} - P_{\bar{n}}\bar{v}$$

$$\bar{v} = \bar{e}_1 \Rightarrow P_{\bar{n}}(\bar{e}_1) = \frac{1}{a^2+b^2+c^2}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{a}{a^2+b^2+c^2}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

SVAR:

$$T_3(\bar{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{a}{a^2+b^2+c^2}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

$$T_3(\bar{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{b}{a^2+b^2+c^2}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

$$T_3(\bar{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{c}{a^2+b^2+c^2}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ och}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} T_3(\bar{e}_1) & T_3(\bar{e}_2) & T_3(\bar{e}_3) \end{pmatrix}$$

(d) Se Maple-resultat sista sidorna.

Problem 4.3.2 c) (i Euler & Euler-kompendiet)

Här söks värdemängden för avbildningen $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ med standardmatris $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$, det vill säga mängden av alla $\bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ för vilka det finns minst en lösning till ekvationen

$$A\bar{x} = \bar{b} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & b_1 \\ 1 & 2 & -4 & b_2 \\ 2 & 3 & -5 & b_3 \end{array}\right) \underset{\begin{smallmatrix}(2)-(1) \\ (3)-2\cdot(1)\end{smallmatrix}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & b_1 \\ 0 & 3 & -9 & b_2 - b_1 \\ 0 & 5 & -15 & b_3 - 2b_1 \end{array}\right) \underset{3\cdot(3)-5\cdot(2)}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & b_1 \\ 0 & 0 & 6 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 3b_3 - 5b_2 - b_1 \end{array}\right)$$

Ekvationen är lösbar om och endast om $3b_3 - 5b_2 - b_1 = 0$, dvs värdemängden är alla vektorer

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b_3 - 5b_2 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = b_2 \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Svar: Planet genom origo parallellt med $\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Problem 4.3.4

a) Finn standardmatrisen för avbildningen $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ för vilken $T\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\bar{u}_1}\right) = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\bar{v}_1}$, $T\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\bar{u}_2}\right) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\bar{v}_2}$, $T\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\bar{u}_3}\right) = \underbrace{\begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\bar{v}_3}$. (3)

b) Är T inverterbar?

Lösning

Låt A vara standardmatrisen för T. (3) kan då skrivas

$$A\, U = V$$

Lösning som i kompendiet kan göras i Maple som visas på sista sidorna.

④ För en 2×2-matris $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ har vi sett att

A är inverterbar om $ad - bc \neq 0$ och då är $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

$ad-bc$ kallas determinanten för A.

För 3×3-matris A, låt

$A_{k,l}$ vara determinanten för matrisen man får genom att ta bort rad k och kolumn l från A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A_{1,1} = \begin{bmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}, \quad A_{1,2} = \begin{bmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$A_{1,3} = \begin{bmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{bmatrix}, \quad A_{2,2} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$A_{2,3} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{bmatrix}, \quad A_{3,1} = \begin{bmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{bmatrix}$$

$$A_{3,2} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,3} \end{bmatrix}, \quad A_{3,3} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$$

För inverterbart A krävs minst en nollskild. Antag att vi gjort radbyten så att a_{31} är nollskild.

Gausseliminering:

$$A \sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} \\ 0 & a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & |A_{3,3}| & |A_{3,2}| \\ 0 & |A_{2,3}| & |A_{2,2}| \end{pmatrix}$$

där vi förutsätter att radoperationer (eventuellt inklusive radbyte) utförts så att $A_{3,3} \neq 0$ och $a_{1,1} \neq 0$ om detta är möjligt.

Fortsatt Gausseliminering ger

$$A \sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & |A_{3,3}| & |A_{3,2}| \\ 0 & |A_{2,3}| & |A_{2,2}| \end{pmatrix} \quad (= \det(A_{3,2})) \quad \xrightarrow{A_{3,3}\cdot(3) - A_{2,3}\cdot(2)} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & |A_{3,3}| & |A_{3,2}| \\ 0 & 0 & |A_{3,3}||A_{2,2}| - |A_{2,3}||A_{3,2}| \end{pmatrix}$$

$$(|A_{3,3}||A_{2,2}| - |A_{2,3}||A_{3,2}|) = (a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2})(a_{1,1}a_{3,3} - a_{3,1}a_{1,3}) - (a_{1,1}a_{3,2} - a_{3,1}a_{1,2})(a_{1,1}a_{2,3} - a_{2,1}a_{1,3})$$

$$= a_{1,1}^2 a_{2,2}a_{3,3} - a_{1,1}a_{2,2}a_{3,1}a_{1,3} - a_{2,1}a_{1,2}a_{1,1}a_{3,3} + \cancel{a_{2,1}a_{1,2}a_{3,1}a_{1,3}}$$
$$- a_{1,1}^2 a_{2,3}a_{3,2} + a_{1,1}a_{2,1}a_{1,3}a_{3,2} + a_{1,1}a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} - \cancel{a_{1,2}a_{1,3}a_{2,1}a_{3,1}}$$

$$= a_{1,1}(a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1})$$

$$= a_{1,1}(a_{1,1}(a_{2,2}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,2}) - a_{1,2}(a_{2,1}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,1}) + a_{1,3}(a_{2,1}a_{3,2} - a_{2,2}a_{3,1}))$$

$$= a_{1,1}\underbrace{(a_{1,1}|A_{1,1}| - a_{1,2}|A_{1,2}| + a_{1,3}|A_{1,3}|)}_{\text{Detta kallas determinanten för } A,\ \det(A)}$$

Vi kommer att se nästa lektion att inledande radbyten endast ändrar tecken på determinanten och man kan komma fram till att A inverterbar $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$. Men ett lättare bevis för detta kommer nästa lektion (Teorem 4, sid 185).

Ej på lektion!

Titta ej för djupt i föregående exempel, för det blir nog bara förvirrande. Slutsatsen att A inverterbar $\Leftrightarrow \det(A) = 0$ följer på ett enklare sätt i avsnitt 3.2.

Definition

För en $n \times n$-matris $A = \begin{array}{c} \text{kol. } k \\ \text{rad } j \end{array} \begin{pmatrix} & & \\ & a_{j,k} & \\ & & \end{pmatrix}$

Låt $A_{j,k}$ vara ~~determinanten för~~ matrisen som fås om man plocka-bort rad j och kolumn k från A.

Då har A determinanten

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1,j} \det A_{1,j} = \sum_{j=1}^{n} a_{1,j} C_{1,j}$$

Det viktigaste i avsnitt 3.1 är Teorem 1

Teorem 1

För $A_{j,k}$ som ovan, definiera kofaktorn $C_{j,k} = (-1)^{k+j} \det A_{k,j}$

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Då är

$$\det A = a_{i1} C_{i1} + a_{i2} C_{i2} + \cdots + a_{in} C_{in} \quad \text{Utveckling längs rad } i$$

$$= a_{1,j} C_{1,j} + a_{2,j} C_{2,j} + \cdots + a_{n,j} C_{n,j} \quad \text{Utveckling längs kolumn } j$$

Praktiskt att välja att utveckla längs en rad eller kolumn med så många nollor som möjligt.

Exempel $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ ← 2 nollor i rad 3! $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$

Utveckling längs rad 3 ger att

$$\det(A) = +0\, C_{3,1} - (-2)\, C_{3,2} + 0\, C_{3,3} =$$

$$= 2\, C_{3,2} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2\,(1 \cdot (-1) - 2 \cdot 0) =$$

$$= 2 \cdot (-1) = \underline{\underline{-2}}$$

Notera: Samma resultat som fick från utveckling längs rad 1 på s. 165 i boken

(6)

$$\begin{array}{c} \text{3 nollor} \\ \downarrow \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -7 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \\ -5 & -8 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 2\,C_{1,3} + 0\cdot C_{2,3} + 0\cdot C_{3,3} + 0\,C_{4,3} =$$

$$= 2\cdot\begin{vmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -5 & -8 & 3 \\ 0 & 5 & -6 \end{vmatrix} = 2\cdot\left(0\cdot C_{1,1} + (-5)\cdot C_{2,1} + 0\cdot C_{3,1}\right)$$

$$= -2\cdot 5\cdot C_{2,1} = 10\cdot\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = 10\left(3\cdot(-6) - 5\cdot(-4)\right) = 10(-18+20) = 20$$

Lektion 16

Första uppgiften, deluppgift (d)

$$> T1e1 := \frac{2\cdot a}{a^2+b^2+c^2}\cdot\langle a, b, c\rangle - \langle 1, 0, 0\rangle :$$

$$T1e2 := \frac{2\cdot b}{a^2+b^2+c^2}\cdot\langle a, b, c\rangle - \langle 0, 1, 0\rangle :$$

$$T1e3 := \frac{2\cdot c}{a^2+b^2+c^2}\cdot\langle a, b, c\rangle - \langle 0, 0, 1\rangle :$$

$$A1 := \langle T1e1|T1e2|T1e3\rangle;$$

$$A1 := \begin{bmatrix} \frac{2\,a^2}{a^2+b^2+c^2}-1 & \frac{2\,a\,b}{a^2+b^2+c^2} & \frac{2\,a\,c}{a^2+b^2+c^2} \\ \frac{2\,a\,b}{a^2+b^2+c^2} & \frac{2\,b^2}{a^2+b^2+c^2}-1 & \frac{2\,b\,c}{a^2+b^2+c^2} \\ \frac{2\,a\,c}{a^2+b^2+c^2} & \frac{2\,b\,c}{a^2+b^2+c^2} & \frac{2\,c^2}{a^2+b^2+c^2}-1 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

(Här skapade jag en 3x3 nollmatris med "Matrix"-kommandot i vänsterkolumnen, och ändrade sedan varje element manuellt. Se Appendix A i Euler & Euler-kompendiet för fler sätt att konstruera matriser i Maple.)

$$> A2 := \begin{bmatrix} \cos(\mathrm{phi}) & -\sin(\mathrm{phi}) & 0 \\ \sin(\mathrm{phi}) & \cos(\mathrm{phi}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$A2 := \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

$$> T3e1 := \langle 1, 0, 0\rangle - \frac{a}{a^2+b^2+c^2}\cdot\langle a, b, c\rangle :$$

$$T3e2 := \langle 0, 1, 0\rangle - \frac{b}{a^2+b^2+c^2}\cdot\langle a, b, c\rangle :$$

$$T3e3 := \langle 0, 0, 1\rangle - \frac{c}{a^2+b^2+c^2}\cdot\langle a, b, c\rangle :$$

$$A3 := \langle T3e1|T3e2|T3e3\rangle;$$

(3)

$$A3 := \begin{bmatrix} 1-\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2} & -\frac{a\,b}{a^2+b^2+c^2} & -\frac{a\,c}{a^2+b^2+c^2} \\ -\frac{a\,b}{a^2+b^2+c^2} & 1-\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2} & -\frac{b\,c}{a^2+b^2+c^2} \\ -\frac{a\,c}{a^2+b^2+c^2} & -\frac{b\,c}{a^2+b^2+c^2} & 1-\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2} \end{bmatrix} \quad \textbf{(3)}$$

Avbildningen *T(x)=T3(T2(T1(x)))* har standardmatris *A3.A2.A1*, där man i Maple skriver vanlig punkt för matrismultiplikation (till skillnad från multiplikation av tal som indikerads genom att trycka * på tangentbordet).

Vi sätter angivna värden på variablerna *a*, *b* och *c*, och räknar sedan ut de efterfrågade standardmatriserna.

```
> a := 1;
  b := 2;
  c := 3;
  A1A2A3 := A1 · A2 · A3;
  A1A3A2 := A1 · A3 · A2;
  A2A1A3 := A2 · A1 · A3;
  A2A3A1 := A2 · A3 · A1;
  A3A1A2 := A3 · A1 · A2;
  A3A2A1 := A3 · A2 · A1;
```

$$a := 1$$
$$b := 2$$
$$c := 3$$

$$A1A2A3 := \left[\left[-\frac{41\cos(\phi)}{49}+\frac{\sin(\phi)}{7}-\frac{9}{98}, \frac{16\cos(\phi)}{49}+\frac{4\sin(\phi)}{7}-\frac{9}{49}, \frac{3\cos(\phi)}{49}-\frac{3\sin(\phi)}{7}+\frac{15}{98}\right],\right.$$
$$\left[\frac{16\cos(\phi)}{49}-\frac{5\sin(\phi)}{14}-\frac{9}{49}, -\frac{17\cos(\phi)}{49}-\frac{\sin(\phi)}{7}-\frac{18}{49}, \frac{6\cos(\phi)}{49}+\frac{3\sin(\phi)}{14}+\frac{15}{49}\right],$$
$$\left.\left[\frac{27\cos(\phi)}{98}+\frac{6\sin(\phi)}{7}-\frac{3}{49}, \frac{27\cos(\phi)}{49}-\frac{3\sin(\phi)}{7}-\frac{6}{49}, -\frac{45\cos(\phi)}{98}+\frac{5}{49}\right]\right]$$

$$A1A3A2 := \begin{bmatrix} -\frac{13\cos(\phi)}{14} + \frac{\sin(\phi)}{7} & \frac{13\sin(\phi)}{14} + \frac{\cos(\phi)}{7} & \frac{3}{14} \\ \frac{\cos(\phi)}{7} - \frac{5\sin(\phi)}{7} & -\frac{\sin(\phi)}{7} - \frac{5\cos(\phi)}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{3\cos(\phi)}{14} + \frac{3\sin(\phi)}{7} & -\frac{3\sin(\phi)}{14} + \frac{3\cos(\phi)}{7} & -\frac{5}{14} \end{bmatrix}$$

$$A2A1A3 := \begin{bmatrix} -\frac{13\cos(\phi)}{14} - \frac{\sin(\phi)}{7} & \frac{\cos(\phi)}{7} + \frac{5\sin(\phi)}{7} & \frac{3\cos(\phi)}{14} - \frac{3\sin(\phi)}{7} \\ -\frac{13\sin(\phi)}{14} + \frac{\cos(\phi)}{7} & \frac{\sin(\phi)}{7} - \frac{5\cos(\phi)}{7} & \frac{3\sin(\phi)}{14} + \frac{3\cos(\phi)}{7} \\ \frac{3}{14} & \frac{3}{7} & -\frac{5}{14} \end{bmatrix}$$

$$A2A3A1 := \begin{bmatrix} -\frac{13\cos(\phi)}{14} - \frac{\sin(\phi)}{7} & \frac{\cos(\phi)}{7} + \frac{5\sin(\phi)}{7} & \frac{3\cos(\phi)}{14} - \frac{3\sin(\phi)}{7} \\ -\frac{13\sin(\phi)}{14} + \frac{\cos(\phi)}{7} & \frac{\sin(\phi)}{7} - \frac{5\cos(\phi)}{7} & \frac{3\sin(\phi)}{14} + \frac{3\cos(\phi)}{7} \\ \frac{3}{14} & \frac{3}{7} & -\frac{5}{14} \end{bmatrix}$$

$$A3A1A2 := \begin{bmatrix} -\frac{13\cos(\phi)}{14} + \frac{\sin(\phi)}{7} & \frac{13\sin(\phi)}{14} + \frac{\cos(\phi)}{7} & \frac{3}{14} \\ \frac{\cos(\phi)}{7} - \frac{5\sin(\phi)}{7} & -\frac{\sin(\phi)}{7} - \frac{5\cos(\phi)}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{3\cos(\phi)}{14} + \frac{3\sin(\phi)}{7} & -\frac{3\sin(\phi)}{14} + \frac{3\cos(\phi)}{7} & -\frac{5}{14} \end{bmatrix}$$

$$A3A2A1 := \left[\left[-\frac{41\cos(\phi)}{49} - \frac{\sin(\phi)}{7} - \frac{9}{98}, \frac{16\cos(\phi)}{49} + \frac{5\sin(\phi)}{14} - \frac{9}{49}, \frac{27\cos(\phi)}{98} - \frac{6\sin(\phi)}{7} - \frac{3}{49}\right], \left[\frac{16\cos(\phi)}{49} - \frac{4\sin(\phi)}{7} - \frac{9}{49}, -\frac{17\cos(\phi)}{49} + \frac{\sin(\phi)}{7} - \frac{18}{49}, \frac{27\cos(\phi)}{49} + \frac{3\sin(\phi)}{7} - \frac{6}{49}\right], \left[\frac{3\cos(\phi)}{49} + \frac{3\sin(\phi)}{7} + \frac{15}{98}, \frac{6\cos(\phi)}{49} - \frac{3\sin(\phi)}{14} + \frac{15}{49}, -\frac{45\cos(\phi)}{98} + \frac{5}{49}\right]\right] \qquad (4)$$

Problem 4.3.4 (a)
Kontrollera att *U* har nollskild determinant och alltså är inverterbar:

> *restart*;

```
with(LinearAlgebra) :
```

$$U := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}:$$

$$V := \begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 10 & -5 & 15 \\ 4 & 5 & 4 \end{bmatrix}:$$

$detU := Determinant(U);$

$$detU := -5 \tag{5}$$

Alltså är U inverterbar och $AU=V$ har lösningen

> $A := V \cdot MatrixInverse(U);$

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & -5 \\ -1 & -2 & -11 \\ \frac{23}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \tag{6}$$

(b) Kontrollera att A har nollskild determinant och alltså är inverterbar:

> $Determinant(A);$

$$-45 \tag{7}$$

>