L36-38 Repetitionsuppgifter januari 2019

1

Tentamen i Matematik 2: M0030M.

Datum: 2018-10-26

Problem 1:

a) Betrakta följande tre vektorer i $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{u}_1 = (a, 2, -1), \quad \mathbf{u}_2 = (4, 1, 0), \quad \mathbf{u}_3 = (1, 5, -2),$$

där a är en reell parameter. Bestäm alla värden på a, så att volymen av den parallellepiped som spänns upp av de givna vektorer är en kubik enhet.

[2 poäng]

b) Bestäm ekvationen för planet i $\mathbb{R}^3$ som passerar genom punkten $(1, 1, -2)$ och som är parallellt med planet

$$x - 2y + 4z = 7.$$

[1 poäng]

c) Betrakta följande två linjer på parameterform i $\mathbb{R}^3$:

$$\ell_1 : \begin{cases} x = -t + 3 \\ y = 2t + 1 \\ z = -t + 2 \quad \text{för alla } t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

$$\ell_2 : \begin{cases} x = 3s + 3 \\ y = -6s + 1 \\ z = 3s + 2 \quad \text{för alla } s \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Bestäm alla skärningspunkter mellan linjerna ℓ_1 och ℓ_2, om några sådana finns.

[2 poäng]

a) Vi har sett två olika formler för parallellepipedens volym:

Adams, avsnitt 10.3, Exempel 4

$$V = |\bar{u}_1 \bullet (\bar{u}_2 \times \bar{u}_3)| = \left| \det \begin{pmatrix} a & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \right|$$ ← Lay, Avsnitt 3.3, Theorem 9

Väljer vi den senare så beräknar vi först determinanten:

$$\begin{vmatrix} a & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} a & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -4(-4-(-5)) + 1 \cdot (-2a - (-1)) =$$

$$= -4 - 2a + 1 = -3 - 2a$$

Vi vill alltså välja a så att

$$1 = V = |-3 - 2a| \iff -3 - 2a = \pm 1$$

$$\Updownarrow$$

$$-3 - 2a = -1 \quad \text{eller} \quad -3 - 2a = 1$$

$$-2a = 2 \quad \text{eller} \quad -2a = 4$$

SVAR: $\underline{a = -1 \quad \text{eller} \quad a = -2}$

2

b) Sökt är planet som passerar genom punkten $(1,1,-2)$ och har normalvektor $\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}$. Det planets ekvation kan skrivas på formen

$$1(x-1)-2(y-1)+4(z-(-2))=0$$

SVAR: $x-1-2(y-1)+4(z+2)=0$

c) $$\ell_1: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} + t\overbrace{\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}}^{\bar{v}_1}$$

$$\ell_2: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} + s\underbrace{\begin{pmatrix}3\\-6\\3\end{pmatrix}}_{\bar{v}_2=-3\bar{v}_1}$$

Båda linjerna går genom punkten $(3,1,2)$ och har samma lutning eftersom denna ges av riktningsvektorerna $\bar{v}_1$ och $\bar{v}_2 = -3\bar{v}_1$.

SVAR: Alla punkter på $\ell_1 = \ell_2$ är alltså skärningspunkter.

Problem 2:

a) Betrakta följande fyra vektorer i $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{u_1} = (1,3,1), \quad \mathbf{u_2} = (2,k,1), \quad \mathbf{u_3} = (k,18,6), \quad \mathbf{u_4} = (2,6,2)$$

där k är en reell parameter. Bestäm alla värden på k, så att de givna fyra vektorerna spänner upp ett plan Π i $\mathbb{R}^3$, dvs

$$\Pi = \text{span}\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}, \mathbf{u_4}\}.$$

[2 poäng]

b) Betrakta tre plan i $\mathbb{R}^3$ som ges av följande ekvationer:

$$\begin{aligned}\Pi_1 &: \ x - 4y + 7z = 1\\ \Pi_2 &: \ 3y - 5z = 0\\ \Pi_3 &: \ -2x + 5y - 9z = a,\end{aligned}$$

där a är en reell parameter. Bestäm alla värden på a, så att de tre planen skär varandra längs en gemensam linje ℓ och bestäm en parametrisk ekvation för den linjen ℓ.

[3 poäng]

a) Eftersom $\bar{u}_4 = 2\bar{u}_1$ så är

$$\Pi = \text{span}\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4\} = \text{span}\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$$

För matrisen $U = (\bar{u}_1\ \bar{u}_2\ \bar{u}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ 3 & k & 18 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ gäller att vektorerna spänner upp $\mathbb{R}^3$ om och endast om $\det(U) \neq 0$.

Vi får alltså att vektorerna spänner upp en linje eller ett plan om

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & k \\ 3 & k & 18 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} k & 18 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 18 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 3 & k \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (6k - 18) - 2 \cdot (18 - 18) + k(3 - k) = 6k - 18 + 3k - k^2$$

$$0 = k^2 - 9k + 18$$

$$k = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{18 \cdot 4}{4}} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81-72}{4}} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{9 \pm 3}{2}$$

$k = 3$ eller $k = 6$

Det återstår att kontrollera om $\Pi = \text{span}\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ är en linje eller ett plan i båda dessa fall. Π är en linje endast om alla tre vektorerna är parallella, men detta sker ej för $k=3$ eller $k=6$:

$k=3$: $\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\bar{u}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 18 \\ 6 \end{pmatrix}$

(inga parallella)

$k=6$: $\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\bar{u}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 18 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \cdot \bar{u}_1$

(endast $\bar{u}_1$ och $\bar{u}_3$ parallella)

SVAR: Span $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4\}$ är ett plan för $k=3$ och för $k=6$.

Alternativ lösning

Tidigare givet lösningsförslag utnyttjar att $\Pi = \text{span}\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4\}$ har exakt likamånga dimensioner som antalet pivå element som fås vid Gausseliminering av matrisen $U = (\bar{u}_1\ \bar{u}_2\ \bar{u}_3\ \bar{u}_4)$. Detta förklaras sist i Avsnitt 4.5 i Lay ("the dimension of Col A") så det hör mer till Matte 3, men kan förstås utnyttjas om man känner till det, men man får hålla tungan rätt i mun när man Gausselliminerar och kontrollera att man aldrig för något värde på k multiplicerar en rad med 0 eller får division med 0.

Ei pivåelement för $k=6$.

$$U=\begin{pmatrix}1&2&k&2\\3&k&18&6\\1&1&6&2\end{pmatrix}\xrightarrow[(3)-(1)]{(2)-3\cdot(1)}\begin{pmatrix}1&2&k&2\\0&k-6&18-3k&0\\0&-1&6-k&0\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&2&k&2\\0&-1&6-k&0\\0&k-6&18-3k&0\end{pmatrix}\xrightarrow[(3)+(k-6)\cdot(2)]{\cdot(-1)}\begin{pmatrix}1&2&k&2\\0&1&k-6&0\\0&0&\underbrace{3(6-k)}_{=-3(k-6)}+(k-6)(6-k)&0\end{pmatrix}\sim$$

$$=(k-6)(-3+(6-k))$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&2&k&2\\0&1&k-6&0\\0&0&(k-6)(3-k)&0\end{pmatrix}$$

Två pivåelement $\iff (k-6)(3-k)=0$

SVAR: $\{\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{u}_3,\bar{u}_4\}$ spänner upp ett plan om och endast om $k=6$ eller $k=3$.

b) Vi skriver ekvationssystemet på matrisform, Gausseliminerar och undersöker för vilket/vilka värden på a vi får exakt en fri variabel (så att lösningsmängden är en linje):

$$\begin{array}{c}(x\quad y\quad z)\\ \left(\begin{array}{ccc|c}1&-4&7&1\\0&3&-5&0\\-2&5&-9&a\end{array}\right)\end{array}\xrightarrow{(3)+2(1)}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-4&7&1\\0&3&-5&0\\0&-3&5&a+2\end{array}\right)\xrightarrow{(3)+(2)}$$

$$\begin{array}{c}(x\quad y\quad z)\\ \sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-4&7&1\\0&3&-5&0\\0&0&0&a+2\end{array}\right)\end{array}$$

En fri variabel om $a=-2$. Då blir lösningen

$z=t$

$3y-5z=0 \Rightarrow y=\frac{5}{3}z=\frac{5}{3}t$

$x=1+4y-7z=1+\frac{20}{3}t-7t=1-\frac{t}{3}$

SVAR: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1/3\\5/3\\1\end{pmatrix}$ för $a=-2$

Problem 3:

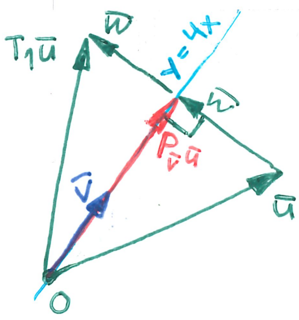
Betrakta två linjära avbildningar T_1 och T_2, där båda avbildar vektorer i $\mathbb{R}^2$. Särskilt speglar T_1 varje vektor i linjen $y=4x$, medan T_2 roterar varje vektor i $\mathbb{R}^2$ moturs med vinkel $\pi/2$ omkring $(0,0)$.

a) Bestäm standardmatrisen för T_1 och standardmatrisen för T_2.

[4 points]

b) Bestäm standardmatrisen för sammansatt avbildning $T_1\circ T_2$.

[1 poäng]



$\bar{v}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}\quad \hat{v}=\frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$

$P_{\bar{v}}\bar{u}=(\bar{u}\cdot\hat{v})\hat{v}=\frac{1}{17}(\bar{u}\cdot\bar{v})\bar{v}$

$\bar{w}=P_{\bar{v}}\bar{u}-\bar{u}$

$T_1\bar{u}=\bar{u}+2\bar{w}=\bar{u}+2P_{\bar{v}}\bar{u}-2\bar{u}=2P_{\bar{v}}\bar{u}-\bar{u}=\frac{2}{17}(\bar{u}\cdot\bar{v})\bar{v}-\bar{u}$

$\bar{u} = \bar{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ ger

$\bar{e}_1 \cdot \bar{v} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} = 1$

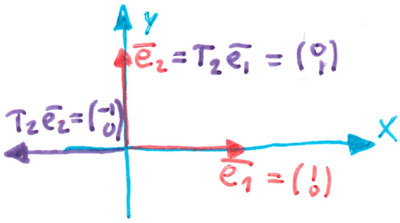
$T_1\, \bar{e}_1 = \frac{2}{17} \cdot 1 \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix}2-17\\8-0\end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix}-15\\8\end{pmatrix}$

$\bar{u} = \bar{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ ger

$\bar{e}_2 \cdot \bar{v} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} = 4$

$T_1\, \bar{e}_2 = \frac{2}{17} \cdot 4 \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix}8-0\\32-17\end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix}8\\15\end{pmatrix}$

T_1 har alltså standardmatris $A_1 = \frac{1}{17}\begin{pmatrix}-15 & 8\\ 8 & 15\end{pmatrix}$



SVAR

T_2 har standardmatris $A_2 = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

b) $T_1 \circ T_2$ har standardmatris

$$A = A_1 A_2 = \frac{1}{17}\begin{pmatrix}-15 & 8\\ 8 & 15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix}8 & 15\\ 15 & -8\end{pmatrix}$$

Problem 4:

a) Låt $x > 0$. Finn en reduktionsformel för följande integral

$$I_n = \int (\ln x)^n\, dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

och använda ditt formel för att bestämma

$$I_3 = \int (\ln x)^3\, dx$$

[3 poäng]

b) Beräkna följande integral:

$$\int \frac{x^3 + x}{x^2 - 1}\, dx.$$

[2 poäng]

a) $I_0 = \int \ln(x)^0\, dx = \int 1\, dx = x + C$

$$I_n = \int \underbrace{1}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)^n}_{g(x)}\, dx = \underbrace{x}_{f(x)}\, \underbrace{\ln(x)^n}_{g(x)} - \int \underbrace{\cancel{x}}_{f(x)} \cdot \underbrace{n \cdot \ln(x)^{n-1} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}}_{g'(x)}\, dx = x\ln(x)^n - n I_{n-1}$$

$$\boxed{\text{Reduktionsformel: } I_n = x\ln(x)^n - n I_{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad I_0 = x + C, \quad C \in \mathbb{R} \text{ godtyckligt}}$$

6 Vi får då

$$I_1 = x\ln(x)^1 - 1\cdot I_0 = x\ln(x) - x - C$$

$$I_2 = x\ln(x)^2 - 2I_1 = x\ln(x)^2 - 2x\ln(x) + 2x + 2C$$

$$I_3 = x\ln(x)^3 - 3I_2 = x\ln(x)^3 - 3x\ln(x)^2 + 6x\ln(x) - 6x \underbrace{-6C}_{=C_2}$$

SVAR: $I_3 = x\ln(x)^3 - 3x\ln(x)^2 + 6x\ln(x) - 6x + C_2$

b)

$$\begin{array}{r|l} & x \\ \hline x^2-1 & x^3 + 0x^2 + x \\ & -(x^3 \quad - x) \\ \hline & 2x \end{array}$$

Enklare:

$$\int \frac{2x}{x^2-1}\,dx = \left[\begin{matrix} u = x^2-1 \\ du = 2x\,dx \end{matrix}\right] = \int \frac{1}{u}\,du = \ln(|u|) + C = \ln(|x^2-1|) + C$$

det vill säga, $\frac{x^3+x}{x^2-1} = x + \frac{2x}{x^2-1} = x + \frac{2x}{(x-1)(x+1)}$

Partialbråksuppdelning

$$\frac{2x}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

Handpåläggning ger att $A = \frac{2\cdot 1}{1+1} = 1$

$B = \frac{2\cdot(-1)}{-1-1} = 1$

Alltså är

$$\int \frac{x^3+x}{x^2-1}\,dx = \int \left(x + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{x^2}{2} + \ln(|x-1|) + \ln(|x+1|) + C$$

Tentamen i Matematik 2: M0030M.

Datum: 2017-08-18

Uppgift 1: Planet Π innehåller punkterna $(0,0,2)$ och $(5,1,1)$. Vidare är linjen,

$$x = 12 + 8t$$
$$y = 5 + 4t$$
$$z = -13 - t,$$

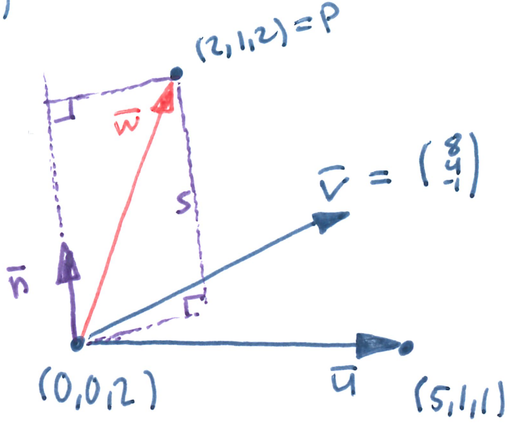
parallell med planet Π.

a) Ange planets ekvation.

b) Beräkna avståndet från punkten $(2,1,2)$ till planet Π.

[5 poäng]

a)



Vektorer parallella med planet:

$$\bar{u} = \begin{pmatrix}5-0\\1-0\\1-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\bar{v} = \begin{pmatrix}8\\4\\-1\end{pmatrix}$$ = linjens riktningsvektor

Normalvektor till planet:

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{pmatrix}5\\1\\-1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}8\\4\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1+4\\-8+5\\20-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-3\\12\end{pmatrix}$$

Vi multiplicerar med $\frac{1}{3}$ och väljer normalvektorn

$$\bar{n} = \begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\underline{\text{Planets ekvation}} \quad x-5 - (y-1) + 4(z-1) = 0}$$

b) I figuren ovan har vi $\bar{w} = \begin{pmatrix}2-0\\1-0\\2-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$
och avståndet s från punkten P till planet är

$s = |\bar{w} \cdot \hat{n}|$ med $\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{18}}\bar{n}$ och

$$\bar{w} \cdot \hat{n} = \frac{1}{\sqrt{18}}(2\cdot 1 + 1\cdot(-1) + 0\cdot 4) = \frac{1}{\sqrt{18}} = \frac{1}{\sqrt{2\cdot 9}} = \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

SVAR: $s = \frac{1}{3\sqrt{2}}$

Lay 1.7 33-37 (sant eller falskt? Motexempel om falskt.)

33. Sant, ty $2\bar{v}_1 + 1\bar{v}_2 - 1\bar{v}_3 + 0\bar{v}_4 = \bar{0}$.

34. Sant, ty $0\bar{v}_1 + 0\bar{v}_2 + 1\bar{v}_3 + 0\bar{v}_4 = \bar{0}$

35. Falskt. Motexempel: Om $\bar{v}_1 = \bar{0}$ och $\bar{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ så är inte $\bar{v}_2 = c\bar{v}_1$ för någon skalär c, men $\bar{v}_1$ och $\bar{v}_2$ är linjärt beroende $(1\bar{v}_1 + 0\bar{v}_2 = \bar{0})$.

36. Falskt. Motexempel: $\bar{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\bar{v}_1 = \bar{v}_2 = \bar{v}_4 = \bar{0}$.

37. Sant (sätt vikt 0 på $\bar{v}_4$)

Några uppgifter ur Calculus-boken

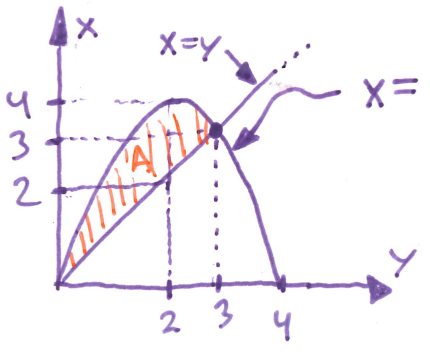
5.6.9 $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{4+\sin^2(x)}\,dx = \left[\begin{matrix} u = \sin(x) \\ du = \cos(x)\,dx \end{matrix}\right] = \int \frac{1}{4+u^2}\,du =$

$$= \int \frac{1}{4(1+\frac{u^2}{4})}\,du = \left[\begin{matrix} v = \frac{u}{2} \\ dv = \frac{1}{2}du \end{matrix}\right] = \int \frac{1}{4(1+v^2)}\,2dv =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+v^2}\,dv = \frac{1}{2}\arctan(v) + C = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{u}{2}\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}\sin(x)\right) + C$$

7.1.7



$x = 4y - y^2 = y(4-y)$

b) A roteras runt y-axeln

Volymelement:

Skiva med innerradie y, ytterradie $y(4-y)$ och tjocklek dy

Area:

$$dA = (\pi y^2(4-y)^2 - \pi y^2) = \pi y^2((4-y)^2 - 1) =$$
$$= \pi y^2(16 - 8y + y^2 - 1) = \pi y^2(15 - 8y + y^2)$$

Volym:

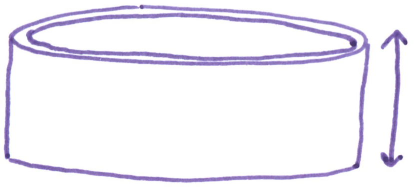
$$dV = \pi(15y^2 - 8y^3 + y^4)$$

$$V = \pi\int_0^3 (15y^2 - 8y^3 + y^4)\,dy = \pi\left[15\frac{y^3}{3} - 8\frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5}\right]_0^3 = \pi\left[5y^3 - 2y^4 + \frac{y^5}{5}\right]_0^3 =$$

$$= \pi\left(5\cdot 3^3 - 2\cdot 3^4 + \frac{3^5}{5}\right) = \pi\cdot 3^3\left(5 - 2\cdot 3 + \frac{9}{5}\right) = \pi 3^3\cdot\frac{4}{5} = \underline{\frac{108\pi}{5}\text{ volymenheter}}$$

a) A roteras runt x-axeln

Skalelement med tjocklek dy, radie y och omkrets $2\pi y$



$$y(4-y) - y = 4y - y^2 - y = 3y - y^2$$

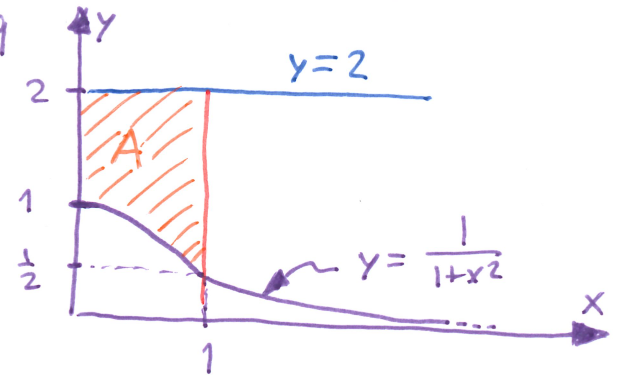
$$dV = 2\pi y \cdot (3y - y^2)\,dy = 2\pi(3y^2 - y^3)\,dy$$

$$V = 2\pi \int_0^3 (3y^2 - y^3)\,dy = 2\pi \left[\cancel{3}\frac{y^3}{\cancel{3}} - \frac{y^4}{4} \right]_0^3 =$$

$$= 2\pi \left(3^3 - \frac{3^4}{4} \right) = 2\pi \cdot 3^3 \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \cancel{2}\pi \cdot 3^3 \cdot \frac{1}{\cancel{4}_{2}} =$$

$V = \frac{27\pi}{2}$ volymenheter

7.1.9



a) A roteras runt x-axeln

Skivelement med innerradie $\frac{1}{1+x^2}$, ytterradie 2 och tjocklek dx

$$dV = \left(\pi \cdot 2^2 - \pi\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2\right) dx = \pi\left(4 - \frac{1}{(1+x^2)^2}\right) dx$$

$$V = \pi \int_0^1 \left(4 - \frac{1}{(1+x^2)^2}\right) dx = \pi(I_1 - I_2) \qquad (1)$$

där

$$I_1 = \int_0^1 4\,dx = [4x]_0^1 = 4 \qquad (2)$$

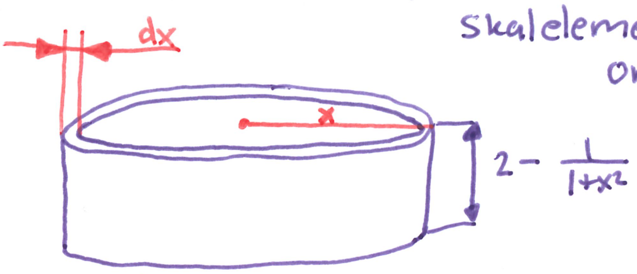
och

$$I_2 = \int_0^1 \frac{1}{\underbrace{(1+x^2)^2}_{=1+\tan^2(\theta) = \frac{1}{\cos^2(\theta)}}} dx = \left[\begin{array}{l} x = \tan(\theta) \\ \theta = \arctan(x) \\ dx = \frac{1}{\cos^2(\theta)}\,d\theta \\ x=0 \Rightarrow \theta = 0 \\ x = 1 \Rightarrow \theta = \pi/4 \end{array}\right] = \int_0^{\pi/4} \cos^4(\theta) \cdot \frac{1}{\cos^2(\theta)}\,d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/4} \cos^2(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} (1 + \cos(2\theta))\,d\theta = \frac{1}{2}\left[\theta + \frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \cdot 1 \qquad (3)$$

$$(1),(2),(3) \Rightarrow V = \pi\left(4 - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right) = \frac{15\pi}{4} - \frac{\pi^2}{8} \text{ volymenheter}$$

b) A roteras runt y-axeln.



Skalelement med tjocklek dx, diameter x, omkrets $2\pi x$ och volym

$$dV = 2\pi x\left(2-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

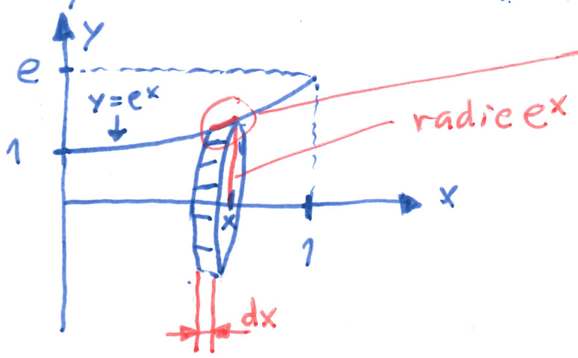
$$V = \pi\left(I_1 - I_2\right), \text{ där} \qquad (1)$$

$$I_1 = \int_0^1 4x\,dx = \left[\frac{\cancel{4}^{\,2}x^2}{\cancel{2}}\right]_0^1 = 2 \quad \text{och} \qquad (2)$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \left[\begin{array}{l} u = 1+x^2 \\ du = 2x\,dx \\ x=0 \Rightarrow u=1 \\ x=1 \Rightarrow u=2 \end{array}\right] = \int_1^2 \frac{1}{u}\,du = \left[\ln(u)\right]_1^2 = \ln(2) \qquad (3)$$

$$(1),(2),(3) \Rightarrow \underline{\underline{V = \pi\left(2-\ln(2)\right) \text{ volymenheter}}}$$

7.3.26 Beräkna den rotationsyta som fås av att rotera $y = e^x$ runt x-axeln för $0 \leq x \leq 1$



ds
dy
dx

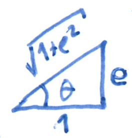
$$ds = \sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{\left(\frac{dx^2}{dx^2}+\frac{dy^2}{dx^2}\right)dx^2} =$$
$$= \sqrt{1^2 + f'(x)^2}\,dx$$

$$dA = 2\pi e^x\,ds = 2\pi e^x\sqrt{1^2+(e^x)^2}\,dx$$

$$A = 2\pi\int_0^1 e^x\sqrt{1+e^{2x}}\,dx = \left[\begin{array}{l} u = e^x \\ du = e^x dx \\ x=0 \Rightarrow u=1 \\ x=1 \Rightarrow u=e \end{array}\right] = 2\pi\int_1^e \sqrt{\underbrace{1+u^2}_{=1+\tan^2(\theta)=\frac{1}{\cos^2(\theta)}}}\,du$$

$$= \left[\begin{array}{l} u = \tan(\theta) \Leftrightarrow \theta = \arctan(u) \\ du = \frac{1}{\cos^2(\theta)}\,d\theta \\ u=1 \Rightarrow \theta = \pi/4 \\ u=e \Rightarrow \theta = \arctan(e) \end{array}\right] = 2\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan(e)} \frac{1}{\cos(\theta)}\cdot\frac{1}{\cos^2(\theta)}\,d\theta =$$

$$= 2\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan(e)} \frac{\cos(\theta)}{\cos^4(\theta)}\,d\theta = 2\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan(e)} \frac{\cos(\theta)}{(1-\sin^2(\theta))^2}\,d\theta = \left[\begin{array}{l} s = \sin(\theta) \\ ds = \cos(\theta)\,d\theta \\ \theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow s = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \theta = \arctan(e) \Rightarrow \tan(\theta) = e \\ \qquad \Rightarrow s = \frac{e}{\sqrt{1+e^2}} \end{array}\right] =$$



$$= 2\pi\int_{1/\sqrt{2}}^{\frac{e}{\sqrt{1+e^2}}} \frac{1}{(1-s^2)^2}\,ds = 2\pi\int_{1/\sqrt{2}}^{\frac{e}{\sqrt{1+e^2}}} \frac{1}{(1-s)^2(1+s)^2}\,ds \qquad (4)$$

Partialbråksuppdelning:

$$\frac{1}{(1-s)^2(1+s)^2} = \frac{A}{1-s} + \frac{B}{(1-s)^2} + \frac{C}{1+s} + \frac{D}{(1+s)^2} =$$

$$= \frac{A(1-s)(1+s)^2 + B(1+s)^2 + C(1-s)^2(1+s) + D(1-s)^2}{(1-s)^2(1+s)^2}$$

Snabbare variant: Handpåläggning $\Rightarrow B = D = \frac{1}{4}$, $-A+C=0 \Rightarrow A=C$. Insättning av $B=D=\frac{1}{4}$ och $A=C$ i en av de andra ekvationerna ger sedan värdet på A och C.

$$= \frac{A\underbrace{(1-s)(1+2s+s^2)}_{=1+2s+s^2-s-2s^2-s^3} + B(1+s)^2 + C\underbrace{(1-2s+s^2)(1+s)}_{=1-2s+s^2+s-2s^2+s^3} + D(1-s)^2}{(1-s)^2(1+s)^2}$$

$$= \frac{A(1+s-s^2-s^3) + B(1+2s+s^2) + C(1-s-s^2+s^3) + D(1-2s+s^2)}{(1-s)^2(1+s)^2} =$$

$$= \frac{\underbrace{A+B+C+D}_{=1} + \underbrace{(A+2B-C-2D)}_{=0}s + \underbrace{(-A+B-C+D)}_{=0}s^2 + \underbrace{(-A+C)}_{=0}s^3}{(1-s)^2(1+s)^2}$$

$$\begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (2)-(1) \\ (3)+(1) \\ (4)+(1) \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \sim \\ (3)-2\cdot(2) \\ (4)-(2) \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \sim \\ (4)-(3) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{array}{l} D = \frac{1}{4} \\ C = \frac{3-8D}{4} = \frac{3-2}{4} = \frac{1}{4} \\ B = -1+2C+3D = -1+\frac{5}{4} = \frac{1}{4} \\ A = 1-B-C-D = 1-\frac{3}{4} = \frac{1}{4} \end{array}$$

Alltså är

$$\frac{1}{(1-s)^2(1+s)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-s} + \frac{1}{(1-s)^2} + \frac{1}{1+s} + \frac{1}{(1+s)^2}\right)$$

Insättning i (4) ger

$$A = \frac{\pi}{2}\int_{1/\sqrt{2}}^{e/\sqrt{1+e^2}} \left(\frac{1}{1-s} + \frac{1}{(1-s)^2} + \frac{1}{1+s} + \frac{1}{(1+s)^2}\right) ds =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[-\ln(|1-s|) + \frac{1}{1-s} + \ln(|1+s|) - \frac{1}{1+s}\right]_{1/\sqrt{2}}^{e/\sqrt{1+e^2}} = \left[\ln\left(\frac{|1+s|}{|1-s|}\right) + \frac{2s}{1-s^2}\right]_{1/\sqrt{2}}^{\frac{e}{\sqrt{1+e^2}}}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\underbrace{\ln\left(\frac{e/\sqrt{1+e^2}+1}{e/\sqrt{1+e^2}-1}\right) + 2\frac{e/\sqrt{1+e^2}}{1-\frac{e^2}{1+e^2}}}_{=\ln\left(\frac{e+\sqrt{1+e^2}}{e-\sqrt{1+e^2}}\right)+2\frac{e\sqrt{1+e^2}}{1+e^2-e^2} = \ln\left(\frac{(e+\sqrt{1+e^2})^2}{\underbrace{(e-\sqrt{1+e^2})(e+\sqrt{1+e^2})}_{=e^2-(1+e^2)=1}}\right)+2e\sqrt{1+e^2}} - \underbrace{\ln\left(\frac{1+1/\sqrt{2}}{1-1/\sqrt{2}}\right)}_{=\ln\left(\frac{(1+1/\sqrt{2})^2}{1/2}\right) = \ln((\sqrt{2}+1)^2) = 2\ln(\sqrt{2}+1)} - \frac{\sqrt{2}}{1/2}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\ln\left((e+\sqrt{1+e^2})^2\right) + 2e\sqrt{1+e^2} - 2\ln(\sqrt{2}+1) - 2\sqrt{2}\right)$$

$$\underline{\underline{A = \pi\left(\ln\left(\frac{e+\sqrt{1+e^2}}{\sqrt{2}+1}\right) + e\sqrt{1+e^2} - \sqrt{2}\right) \text{ areaenheter}}}$$