Tenta 2020-03-26 uppgift 5, alternativ lösning 1

den 29 maj 2020 11:38

5. Beräkna kurvintegralen

$$I = \oint_C (3x^2y^2 + 2x^2y)\,dx + x^3(2y+1)\,dy,$$

där C är den moturs orienterade ellipsen $x^2 + 4y^2 = 9$.

$$D: x^2 + 4y^2 \leq 9$$

$$4y^2 \leq 9 - x^2$$

$$y^2 \leq \frac{9-x^2}{4}$$

$$|y| \leq \frac{\sqrt{9-x^2}}{2}$$

I lösningen till höger visas att

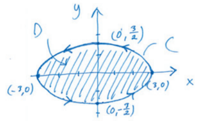
$$I = \iint_D x^2\,dx\,dy = 4\int_0^3 \int_0^{\frac{\sqrt{9-x^2}}{2}} x^2\,dy\,dx = 4\int_0^3 x^2 \frac{\sqrt{9-x^2}}{2}\,dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l} x = 3\sin(\theta),\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ \sqrt{9-x^2} = \sqrt{9(1-\sin^2(\theta))} = 3\cos(\theta) \\ dx = 3\cos(\theta)\,d\theta \\ x = 0 \iff \theta = 0 \\ x = 3 \iff \theta = \frac{\pi}{2} \end{array}\right] = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 9\sin^2(\theta)\cdot\frac{3\cos(\theta)}{2}\cdot 3\cos(\theta)\,d\theta =$$

$$= \frac{81}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\sin(\theta)\cos(\theta))^2\,dt = \frac{81}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2\theta)\,d\theta = \frac{81}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(4\theta)}{2}\,d\theta =$$

$$= \frac{81}{4}\left[\theta - \frac{\sin(4\theta)}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{81}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\overbrace{\sin(2\pi)}^{=0}}{4} - 0 + 0\right) = \underline{\underline{\frac{81\pi}{8}}}$$

$$\underline{5} \quad \oint_C F_1\,dx + F_2\,dy = \oint_C (3x^2y^2 + 2x^2y)\,dx + x^3(2y+1)\,dy$$



Kurvan C omsluter ellipsskivan

$$D: x^2 + 4y^2 \leq 9$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^3(2y+1)\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2y^2 + 2x^2y\right)$$

$$= 3x^2(2y+1) - 6x^2y - 2x^2 = x^2$$

För att beräkna kurvintegralen använder vi Greens sats:

$$\oint_C F_1\,dx + F_2\,dy = \iint_D \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\,dx\,dy = \iint_D x^2\,dx\,dy$$

Variabelbyte:

$$\begin{cases} x = u \\ y = \frac{1}{2}v \end{cases}, \quad J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \Rightarrow dx\,dy = \frac{1}{2}\,du\,dv$$

$$\Rightarrow \iint_D x^2\,dx\,dy = \iint_{u^2+v^2 \leq 9} u^2 \cdot \frac{1}{2}\,du\,dv = \frac{1}{2}\int_{r=0}^{3}\int_{\theta=0}^{2\pi} (r\cos\theta)^2\,r\,d\theta\,dr$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^3 r^3\,dr \int_0^{2\pi} \underbrace{\cos^2\theta}_{\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)}\,d\theta = \frac{1}{2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{3} \cdot \frac{1}{2}(2\pi + 0)$$

$$= \frac{\pi}{8}\cdot 3^4 = \underline{\underline{\frac{81\pi}{8}}}$$

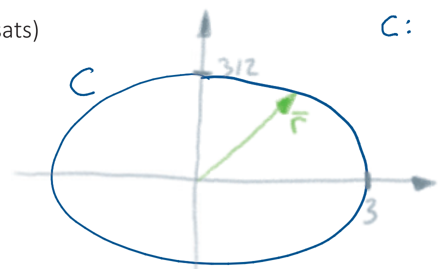
Tenta 2020-03-26 uppgift 5, alternativ lösning 2 (utan Greens sats)

den 29 maj 2020 09:54

5. Beräkna kurvintegralen

$$I = \oint_C (3x^2y^2 + 2x^2y)\,dx + x^3(2y+1)\,dy,$$

där C är den moturs orienterade ellipsen $x^2 + 4y^2 = 9$.



$$C: x^2 + 4y^2 = 9$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9/4} = 1$$

Ellips med axlar 3 och $\frac{3}{2}$

Parametrisering:

$$\bar{r}(t) = \begin{pmatrix} 3\cos(t) \\ \frac{3}{2}\sin(t) \end{pmatrix}, \ -\pi \leq t \leq \pi$$

För vektorfältet $\bar{F} = \begin{pmatrix} 3x^2y^2 + 2x^2y \\ x^3(2y+1) \end{pmatrix}$ är

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \bar{F} \cdot \frac{d\bar{r}}{dt}\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} \begin{pmatrix} 3\cdot 9\cos^2(t)\cdot\frac{9}{4}\sin^2(t) + 2\cdot 9\cos^2(t)\cdot\frac{3}{2}\sin(t) \\ 3^3\cos^3(t)\,(2\cdot\frac{3}{2}\sin(t) + 1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3\sin(t) \\ \frac{3}{2}\cos(t) \end{pmatrix} dt =$$

$$= 81\int_{-\pi}^{\pi} \left(\boxed{-\frac{9}{4}\cos^2(t)\sin^3(t)} - \cos^2(t)\sin^2(t) + \boxed{\frac{3}{2}\sin(t)\cos^4(t)} + \frac{1}{2}\cos^4(t)\right) dt = 81\left(-I_1 + \frac{1}{2}I_2\right) \qquad (1)$$

$\overset{\text{def}}{\equiv}$ $g(t)$ = udda funktion av t $\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,dt = 0$

Integral över heltantal perioder $= 0$

där

$$I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(2\cos(t)\sin(t))^2}{4}\,dt = \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(2t)\,dt = \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos(4t)}{2}\,dt = \frac{1}{4}\left[\frac{x}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{4} \qquad (2)$$

och

$$I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} (\cos^2(t))^2\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1 + \cos(2t)}{2}\right)^2 dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + 2\cos(2t) + \cos^2(2t)}{4}\,dt = \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + 2\cos(2t) + \frac{1 + \cos(4t)}{2}\right) dt$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{3}{2}\,dt = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}\cdot 2\pi = \frac{3\pi}{4} \qquad (3)$$

$$(1),(2),(3) \Longrightarrow I = 81\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{81\pi}{4}\left(-1 + \frac{3}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{81\pi}{8}}}$$

Tenta 2020-06-01 uppgift 3

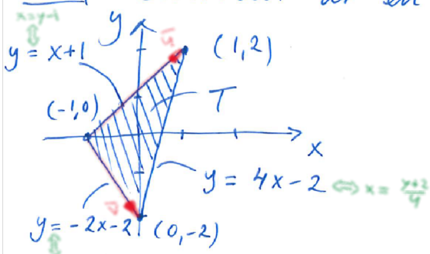
den 1 juni 2020 21:08

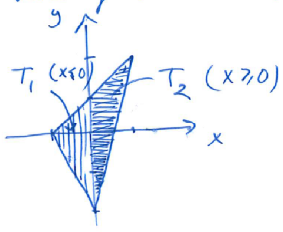
3. Låt T beteckna det triangelformade område i $\mathbb{R}^2$ som har hörn i punkterna $(-1,0)$, $(0,-2)$ och $(1,2)$. Beräkna integralen

$$\iint_T (2+|x|)\,dA.$$

(5 p)

3) Området är en triangel i $\mathbb{R}^2$.





$T_1: \begin{cases} -1\le x\le 0 \\ -2x-2\le y\le x+1 \end{cases}$, $\quad T_2: \begin{cases} 0\le x\le 1 \\ 4x-2\le y\le x+1 \end{cases}$

$$I=\iint_T 2+|x|\,dA = \iint_T 2\,dA + \iint_T |x|\,dA = I_1+I_2$$

$$I_1 = \iint_T 2\,dA = 2\,\text{Area}(T) = 2\cdot 3 = 6$$

$$\bar{u} = \begin{pmatrix}1-(-1)\\2-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix},\quad \bar{v} = \begin{pmatrix}0-(-1)\\-2-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

$$\text{Area}(T) = \frac12\left|\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}\right| = \frac12\left|\begin{pmatrix}2\cdot0-0\cdot(-2)\\0\cdot1-2\cdot0\\2\cdot(-2)-2\cdot1\end{pmatrix}\right| = \frac62 = 3$$

$$I_2 = \iint_T |x|\,dA = \iint_{T_1\,(x\le0)} |x|\,dA + \iint_{T_2\,(x\ge0)} |x|\,dA$$

$$= \int_{-1}^{0}\int_{-2x-2}^{x+1} (-x)\,dy\,dx + \int_0^1\int_{4x-2}^{x+1} x\,dy\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0} (-x)(3x+3)\,dx + \int_0^1 x(3-3x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0} -3x^2-3x\,dx + \int_0^1 3x-3x^2\,dx$$

$$= \left[-x^3-\frac{3x^2}{2}\right]_{x=-1}^{0} + \left[\frac{3x^2}{2}-x^3\right]_{x=0}^{1}$$

$$= 0-\left(-(-1)-\frac32\right) + \left(\frac32-1-0\right)$$

$$= \frac12+\frac12 = 1$$

Svar: $\iint_T 2+|x|\,dA = 6+1 = 7$

Alternativ 2: $I = I_1+I_2$ med

$$I_1 = \int_{-1}^{0}\int_{-2x-2}^{x+1} 2-x\,dy\,dx = \int_{-1}^{0}(2-x)(x+1+2x+2)\,dx = \int_{-1}^{0}(2-x)(3x+3)\,dx = \int_{-1}^{0}(6x+6-3x^2-3x)\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{0}(-3x^2+3x+6)\,dx = \left[-x^3+3\frac{x^2}{2}+6x\right]_{-1}^{0} = 0-\left(1+\frac32-6\right) = 6-\frac52 = \frac72 = 3{,}5 \quad \text{och}$$

$$I_2 = \int_0^1\int_{4x-2}^{x+1}(2+x)\,dx = \int_0^1 (2+x)(x+1-4x+2)\,dx = \int_0^1(2+x)(3-3x)\,dx = \int_0^1(6-6x+3x-3x^2)\,dx =$$

$$= \int_0^1(-3x^2-3x+6)\,dx = \left[-x^3-\frac{3x^2}{2}+6x\right]_0^1 = -1-\frac32+6-0 = 6-\frac52 = \frac72 = 3{,}5$$

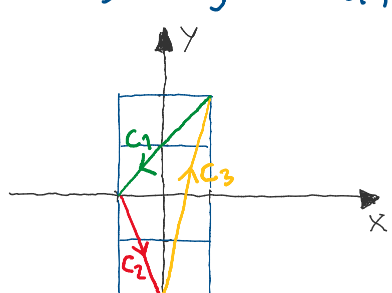
$\Longrightarrow$ SVAR: $I = 7$

Alternativ 3

För $F = \begin{pmatrix}-|x|y\\2x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F_1\\F_2\end{pmatrix}$ är $\frac{\partial F_2}{\partial x} = 2$, $\frac{\partial F_1}{\partial y} = -|x|$ och Greens sats ger att

$$I = \iint_T (2+|x|)\,dA = \iint_T\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dA = \oint_{\partial T} \bar F\cdot d\bar r = \int_{\partial T} \bar F\cdot\frac{d\bar r}{dt}\,dt = \underbrace{\int_{C_1}\bar F\cdot\frac{d\bar r}{dt}\,dt}_{I_1} + \underbrace{\int_{C_2}\bar F\cdot\frac{d\bar r}{dt}\,dt}_{I_2} + \underbrace{\int_{C_3}\bar F\cdot\frac{d\bar r}{dt}\,dt}_{I_3}$$

Med följande parametrisering av randen ∂T



C_1: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$

C_2: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

C_3: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$

$$I_1 = \int_0^1 \begin{pmatrix}-|x|y\\2x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}dt = \int_0^1(2|x|y-4x)\,dt = \int_0^1\Big(2\overbrace{|1-2t|(2-2t)}^{=\begin{cases}(1-2t)(2-2t)=4t^2-6t+2 & \text{om } 0\le t\le\frac12\\ -4t^2+6t-2 & \text{om } \frac12\le t\le 1\end{cases}}-4+8t\Big)\,dt = \int_0^{\frac12}(8t^2-4t)\,dt + \int_{\frac12}^1(-8t^2+20t-8)\,dt =$$

$$= \left[8\frac{t^3}{3}-2t^2\right]_0^{\frac12} + \left[-8\frac{t^3}{3}+10t^2-8t\right]_{\frac12}^1 = \cancel{\frac88}\cdot\frac13-\cancel{\frac24}^{\,1/2}-0-\frac83+10-8+\cancel{\frac88}\cdot\frac13-\cancel{\frac{10}{4}}^{\,5/2}+4 = -\frac63-\frac62+6 = -2-3+6 = 1$$

$$I_2 = \int_0^1\begin{pmatrix}\overbrace{-|x|}^{=x}y\\2x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}dt = \int_0^1(xy-4x)\,dt = \int_0^1(-2t(t-1)-4(t-1))\,dt = \int_0^1(-2t^2-2t+4) = \left[-2\frac{t^3}{3}-t^2+4t\right]_0^1 = -\frac23-1+4 = -\frac23+\frac93 = \frac73$$

$$I_3 = \int_0^1\begin{pmatrix}-\overbrace{|x|}^{=x}y\\2x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}dt = \int_0^1(-xy+8x)\,dt = \int_0^1 x(8-y)\,dt = \int_0^1 t(10-4t)\,dt = \int_0^1(10t-4t^2)\,dt = \left[5t^2-4\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = 5-\frac43 = \frac{15}{3}-\frac43 = \frac{11}{3}$$

Alltså är $I = 1+\frac73+\frac{11}{3} = 1+\frac{18}{3} = 1+6 = 7$

Tenta 2020-06-01 uppgift 4

4. Låt P beteckna det pyramidformade område i $\mathbb{R}^3$ som definieras av

$$P\colon 0 \le 2z \le 12 - 4|x| - 6|y|\,.$$

a) Beräkna volymen av området P. (2 p)

b) Bestäm koordinaterna (x_c, y_c, z_c) för pyramidens masscentrum, d v s beräkna

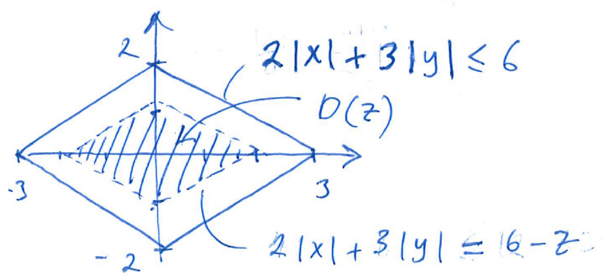
$$x_c = \frac{1}{\text{Volym}(P)} \iiint_P x\,dV, \quad y_c = \frac{1}{\text{Volym}(P)} \iiint_P y\,dV$$

$$z_c = \frac{1}{\text{Volym}(P)} \iiint_P z\,dV.$$

Pyramiden antas ha en homogen densitet. (3 p)

4) $P:\ 0 \le 2z \le 12 - 4|x| - 6|y|$

$z = 0 \Rightarrow 0 \le 12 - 4|x| - 6|y| \Rightarrow \boxed{2|x| + 3|y| \le 6}$



$x = y = 0 \Rightarrow 0 \le 2z \le 12 \Rightarrow \boxed{0 \le z \le 6}$

Integrationsgränser

$$P: \begin{cases} 2|x| + 3|y| \le 6 \\ 0 \le z \le 6 - 2|x| - 3|y| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le z \le 6 \\ \underbrace{2|x| + 3|y| \le 6 - z}_{D(z)} \end{cases}$$

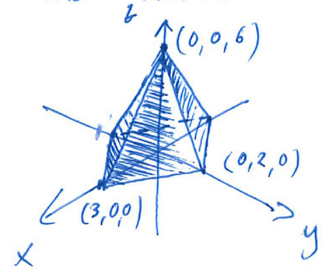
Alternativt:

$$V = 4\int_0^3 \int_0^{\frac{6-2x}{3}} \int_0^{6-2x-3y} dz\,dy\,dx = 4\int_0^3 \int_0^{\frac{6-2x}{3}} (6-2x-3y)\,dy\,dx = 4\int_0^3 \Big[(6-2x)y - 3\frac{y^2}{2}\Big]_{y=0}^{\frac{6-2x}{3}} dx =$$

$$= 4\int_0^3 \Big(\frac{(6-2x)^2}{3} - \frac{(6-2x)^2}{6}\Big) dx = \frac{4}{6}\int_0^3 (36 - 24x + 4x^2)\,dx = \frac{2}{3}\Big[36x - 12x^2 + \frac{4x^3}{3}\Big]_0^3 =$$

$$= \frac{2}{\cancel{3}}\big(\cancel{3}\cdot 36 - 12\cdot 3^{\cancel{2}} + 4\cdot 3^{\cancel{3}}\big) = 2(36 - 36 + 12) = \underline{\underline{24 \text{ volymenheter}}}$$

3D-skiss.



a) Pyramidens volym kan beräknas enligt formeln:

$$\text{Volym}(P) = \frac{\text{Bottenarea} \cdot \text{höjd}}{3} = \frac{12 \cdot 6}{3} = \underline{\underline{24}}\ [\text{v.e}]$$

b)

$$x_c = \frac{1}{24} \underset{P}{\iiint} \overset{\text{udda f:n}}{x}\,dV = \frac{1}{24}\cdot 0 = \underline{\underline{0}}$$

P ← symmetri m.a.p. x

$$y_c = \frac{1}{24} \underset{P}{\iiint} \overset{\text{udda f:n}}{y}\,dV = \frac{1}{24}\cdot 0 = \underline{\underline{0}}$$

P ← symmetri m.a.p. y

$$z_c = \frac{1}{24} \underset{P}{\iiint} z\,dV = \frac{1}{24}\int_0^6 \Big(\underset{D(z)}{\iint} z\,dx\,dy\Big) dz$$

$$= \frac{1}{24}\int_0^6 z \cdot \underbrace{\text{Area}(D(z))}_{2\cdot\frac{6-z}{2}\cdot\frac{6-z}{3}}\,dz = \frac{1}{24}\cdot\int_0^6 \frac{z(6-z)^2}{3}\,dz$$

$$= \frac{1}{72}\int_0^6 36z - 12z^2 + z^3\,dz = \frac{1}{72}\Big[18z^2 - 4z^3 + \frac{z^4}{4}\Big]_{z=0}^6$$

$$= \frac{1}{72}\Big(18\cdot 6^2 - 4\cdot 6^3 + \frac{6^4}{4}\Big) = \frac{1}{2}(18 - 24 + 9) = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$$

Svar: Pyramidens masscentrum ligger på z-axeln och har koordinaterna $(0, 0, \frac{3}{2})$.

den 22 oktober 2020 13:08

2. Bestäm och klassificera alla kritiska punkter och avgör om punkten/punkterna är lokalt max , lokalt min eller sadelpunkt för funktionen nedan

$$f(x,y) = x^3 + 3x^2 + 4xy + y^2.$$

(5p)

$$f(x,y) = x^3 + 3x^2 + 4xy + y^2$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 6x + 4y = 0 & (1) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 4x + 2y = 0 & (2) \end{cases}$$

$(2) \iff y = -2x$ insättning i (1) ger

$$3x^2 + 6x - 8x = 0$$

$$(3x-2)x = 0 \implies \begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix} \text{ eller } \begin{matrix} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{4}{3} \end{matrix} \implies \boxed{\text{Kritiska punkter } (0,0) \text{ och } (\tfrac{2}{3}, -\tfrac{4}{3})}$$

Klassifiering

Antingen via Taylorpolynom som i Mikaels lösningsförslag, eller via Hessianen, som följer.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x + 6$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$ ger Hessianen

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x+6 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

För de båda kritiska punkterna följer att

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \text{ där } B^2 - AC = 16 - 12 = 4 > 0 \implies f \text{ har sadelpunkt i } (0,0).$$

$$H(\tfrac{2}{3}, -\tfrac{4}{3}) = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \text{ där } \begin{cases} A > 0 \\ B^2 - AC = 16 - 20 = -4 < 0 \end{cases} \implies f \text{ har lokalt minimum i } (\tfrac{2}{3}, -\tfrac{4}{3})$$

$\boxed{\text{SVAR: } f \text{ har sadelpunkt i } (0,0) \text{ och lokalt minimum i } (\tfrac{2}{3}, -\tfrac{4}{3}).}$

den 24 oktober 2020 20:17

4. Låt $0 < a < b$. Beräkna trippelintegralen

$$I = \iiint_R \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \, dxdydz,$$

$R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2} \leq b\}$. Dvs. området R är ett ihåligt klot. (5p)

Området R i sfäriska koordinater:

$$\begin{cases} a \leq \rho \leq b \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \phi \leq \pi \end{cases}, \quad x^2+y^2+z^2 = \rho^2, \quad dx\,dy\,dz = \rho^2 \sin(\phi) \, d\rho \, d\theta \, d\phi$$

ger

$$I = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{1}{\cancel{\rho^2}} \cancel{\rho^2} \sin(\phi) \, d\rho \, d\theta \, d\phi = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} [\ln(\rho)]_a^b \, d\theta \sin(\phi) d\phi = 2\pi (\ln(b) - \ln(a)) \cdot [-\cos(\phi)]_0^{\pi} = 4\pi \ln(\tfrac{b}{a})$$

SVAR: $4\pi \ln(\frac{b}{a})$

6. Låt vektorfältet $\mathbf{F}$ definieras genom $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + yx^2\mathbf{j} + zx\mathbf{k}$, och låt S vara den slutna ytan till den solida kroppen, som beskrivs av $x^2 + y^2 \leq a^2$, $0 \leq z \leq b$. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}$ ut genom ytan S. (5p)

Låt V = volymen som S omsluter

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} xy \\ yx^2 \\ zx \end{pmatrix} \text{ och flödet ut genom } S \text{ är}$$

$$I = \oiint_S \bar{F} \cdot \bar{n} \, dS = \iiint_V \operatorname{div}(\bar{F}) \, dV = \iiint_V (y + x^2 + x) \, dx\,dy\,dz$$

Cylindriska koordinater

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \\ z = z \end{cases} \text{ med } \begin{cases} 0 \leq z \leq b \\ 0 \leq r \leq a \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \text{ och } dV = r\,dr\,d\theta\,dz \text{ ger integralen}$$

(eller annat intervall av längd 2π)

$$I = \int_0^b \int_0^a \int_0^{2\pi} (r\cos(\theta) + r\sin(\theta) + r^2 \underbrace{\cos^2(\theta)}_{= \frac{1+\cos(2\theta)}{2}}) \, r \, d\theta \, dr \, dz = \int_0^b \int_0^a \Big(r^2 \overbrace{[\sin(\theta) - \cos(\theta)]_0^{2\pi}}^{=0} + \frac{r^3}{\cancel{2}} \overbrace{[\theta + \tfrac{1}{2}\sin(2\theta)]_0^{2\pi}}^{=\cancel{2}\pi} \Big) dr\,dz$$

$$= \pi \int_0^b \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a dz = \frac{\pi a^4}{4} b$$

SVAR: $\dfrac{\pi a^4 b}{4}$

F16 Vektorfält sid 5

den 27 april 2022 21:31

Ex: Visa att $\bar{F}$ är konservativt för

$$\bar F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2y^2z+2xy \\ 2x^3yz + x^2+1 \\ x^3y^2\end{pmatrix}.$$

Vi behöver bestämma en potential ϕ för vilken

$$\nabla\phi = \bar F \iff \begin{cases} \dfrac{\partial\phi}{\partial x} = 3x^2y^2z+2xy & (10)\\[2mm] \dfrac{\partial\phi}{\partial y} = 2x^3yz+x^2+1 & (11)\\[2mm] \dfrac{\partial\phi}{\partial z} = x^3y^2 & (12)\end{cases}$$

$$(12) \Rightarrow \phi(x,y,z) \quad x^3y^2z + C(x,y) \qquad (13)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = 3x^2y^2z + \frac{\partial C}{\partial x} \qquad (14)$$

$$(10),(14) \Rightarrow \cancel{3x^2y^2z} + \frac{\partial C(x,y)}{\partial x} = \cancel{3x^2y^2z} + 2xy$$

$$C(x,y) = x^2y + D(y) \qquad (15)$$

$$(13),(15) \Rightarrow \phi(x,y,z) = x^3y^2z + x^2y + D(y) \qquad (16)$$

$$\Downarrow$$

$$\cancel{2x^3yz} + \cancel{x^2} + 1 \overset{(11)}{=} \frac{\partial\phi}{\partial y} = \cancel{2x^3yz} + \cancel{x^2} + D'(y)$$

$$\Updownarrow$$

$$D(y) = y + E$$

Insättning i (16) ger

SVAR: $\phi(x,y,z) = x^3y^2z + x^2y + y + E$

(Snabb kontrollräkning $\Rightarrow$ (10), (11), (12) uppfyllda.)

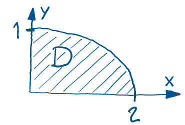
Repetititonsuppgifter efter F16, sid 1 (Tenta 2021-06-01, uppgift 1-3.)

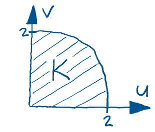
den 28 april 2022 17:46

Del B

Till Uppgift 1–4 efterfrågas fullständiga lösningar och motiveringar. Resonemang, införda beteckningar, uträkningar m m ska redovisas så utförligt att de går att följa. Delvis lösta uppgifter bör lämnas in. Skriv ned dina lösningar på papper, fota av/scanna dem och lämna in dem elektroniskt i Canvas. Gör en inlämning per uppgift.

1. Låt D beteckna det område i $\mathbb{R}^2$ som definieras av





$$D\colon x^2+4y^2 \le 4, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0. \qquad (1)$$

Koordinaterna (x^*, y^*) för områdets masscentrum kan beräknas enligt

$$x^* = \frac{1}{\text{Area}(D)}\iint_D x\,dA, \quad y^* = \frac{1}{\text{Area}(D)}\iint_D y\,dA.$$

Beräkna x^* och y^*.

Variabelbyte $\begin{cases} x = u \\ y = \frac{v}{2}\end{cases}$ insatt i (1) ger $u^2+v^2 \le 2.$

Jacobian

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Area}(D) = \iint_D dA = \iint_K \left|\tfrac{1}{2}\right| du\,dv = \frac{1}{2}\,\text{area}(K) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{4}}\pi\cdot\cancel{2^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Polära koordinater ger

$$\iint_D x\,dA = \iint_K u\cdot\tfrac{1}{2}\,du\,dv = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 r\cos(\theta)\,r\,dr\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos(\theta)\,d\theta\cdot\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2 = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\overset{4}{\cancel{8}}}{3}\left[\sin(\theta)\right]_0^{\pi/2} = \frac{4}{3}$$

$$\iint_D y\,dA = \iint_K \frac{v}{2}\cdot\frac{1}{2}\,du\,dv = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 r\sin(\theta)\,r\,dr\,d\theta =$$

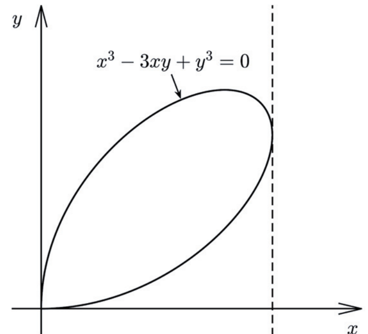
$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\sin(\theta)\,d\theta\cdot\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2 = \frac{1}{\cancel{4}}\cdot\frac{\overset{2}{\cancel{8}}}{3}\left[-\cos(\theta)\right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}$$

SVAR: $x^* = \frac{8}{3\pi}$, $y^* = \frac{4}{3\pi}$

2. Använd Lagranges metod för att bestämma det största värde som funktionen

$$f(x, y) = x$$

kan anta, givet att bivillkoren $x \geq 0$, $y \geq 0$ och $x^3 - 3xy + y^3 = 0$ är uppfyllda.



Bilda Lagrangianen $L(x,y,\lambda) = x + \lambda(x^3 - 3xy + y^3)$

Kritiska punkter:

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial L}{\partial x} = 1 + \lambda(3x^2 - 3y) = 1 + 3\lambda(x^2 - y) & (1) \\ 0 = \frac{\partial L}{\partial y} = -3\lambda x + 3\lambda y^2 = 3\lambda(x - y^2) & (2) \\ 0 = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^3 - 3xy + y^3 & (3) \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow \lambda \neq 0$, $x^2 \neq y$ och $3\lambda = -\frac{1}{x^2 - y} = -\frac{1}{y - x^2}$ (4)

$(2) \Longrightarrow 0 = x - y^2 \Leftrightarrow x = y^2$ (5)

$(3),(5) \Rightarrow 0 = y^6 - 3y^3 + y^3 = y^3(y^3 - 2) \Rightarrow (y = 0)$ eller $y = 2^{\frac{1}{3}}$

$\Downarrow (4)$

$x = 0$ ingen lösning till (1)

Enda lösningen är alltså $y = 2^{1/3} \overset{(5)}{\Rightarrow} x = 2^{2/3}$

SVAR: $x = 2^{2/3}$, $y = 2^{1/3}$, $f(2^{2/3}, 2^{1/3}) = 2^{2/3}$ $\left(\text{och } \lambda = \frac{1}{3(2^{4/3} - 2^{1/3})}\right)$

Att detta ger ett största värde inses då $f(x,y) = x$ och man ser i figuren ovan att det finns en punkt med maximal x-koordinat.

Kontroll

(1): $HL \overset{(4)}{=} 1 + \frac{3(x^2 - y)}{3(y - x^2)} = 1 - 1 = 0 = VL$

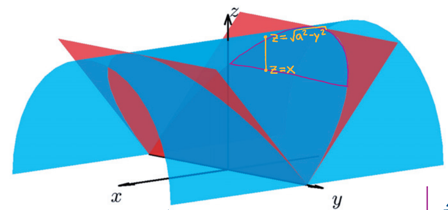
(2): $HL = 3\lambda(-2^{2/3} + 2^{2/3}) = 0 = VL$

(3): $HL = 4 - 3 \cdot 2^{2/3} 2^{1/3} + 2 = 4 - 3 \cdot 2 + 2 = 0 = VL$

Observera även att $\nabla L = \bar{0}$ enbart är ett tillräckligt villkor för lokala extremvärden. Härledningen förutsatte extremvärden i punkter där kurvan har tangent och riktningsderivatan i den riktningen är definierad, så globalt minimum i $(0,0)$ uppfyller ej (1) ovan.

3. En cylindrisk trästock med radie $a > 0$ och centrum längs x-axeln antas beskrivas av olikheten $y^2 + z^2 \leq a^2$. Ur stockens övre halva ($z \geq 0$) sågas två snitt. Det första snittet går längs planet $z = x$ till planet $z = 0$. Det andra snittet går längs planet $z = -x$ till planet $z = 0$. Hur stor volym får den utsågade biten

$$B\colon y^2 + z^2 \leq a^2,\ z \geq |x|?$$

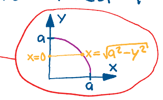


Skärningslinjens projektion i xy-planet:

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = a^2 & (1) \\ z = |x| & (2) \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = a^2 \quad (3)$$

Av symmetriskäl samma volym över varje kvadrant, så vi begränsar oss till första kvadranten och multiplicerar med 4

Integrationsområde:



$$\begin{cases} 0 \leq y \leq a \\ 0 \leq x \leq \sqrt{a^2 - y^2} \\ x \leq z \leq \sqrt{a^2 - y^2} \end{cases}$$

Mellan ytorna $z = x$ och $y^2 + z^2 = a^2$, som markerat i figuren ovan.

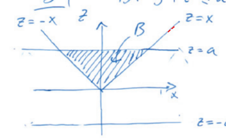
Volym:

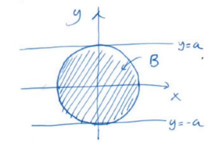
$$V = 4\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} \int_x^{\sqrt{a^2-y^2}} dz\,dx\,dy = 4\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} \left(\sqrt{a^2-y^2} - x\right) dx\,dy = 4\int_0^a \overbrace{\left[\sqrt{a^2-y^2}\,x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\sqrt{a^2-y^2}}}^{= a^2 - y^2 - \frac{a^2-y^2}{2} = \frac{a^2-y^2}{2}} dy$$

$$= 2\left[a^2 y - \frac{y^3}{3}\right]_0^a = 2\left(a^3 - \frac{a^3}{3} - 0\right) \Rightarrow \boxed{\text{SVAR: } V = \frac{4a^3}{3}}$$

Alternativ lösning

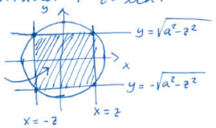
3) $B\colon y^2 + z^2 \leq a^2,\ z \geq |x|$





Det finns flera sätt att beräkna volymen av området B. För att bestämma integrationsgränser väljer vi att skiva området i z-led.

$$B\colon \begin{cases} 0 \leq z \leq a \\ \left.\begin{aligned} -z \leq x \leq z \\ -\sqrt{a^2-z^2} \leq y \leq \sqrt{a^2-z^2} \end{aligned}\right\} R(z) \end{cases}$$



$$\text{Volym}(B) = \iiint_B dV = \int_{z=0}^{a} \left(\iint_{R(z)} dx\,dy\right) dz$$

$$= \int_0^a 2z \cdot 2\sqrt{a^2 - z^2}\,dz \overset{\left[\begin{smallmatrix} u = a^2 - z^2 \\ du = -2z\,dz \end{smallmatrix}\right]}{=} -2\int_{z=0}^{a} \sqrt{u}\,du$$

$$= -2\left[\frac{2}{3} u^{3/2}\right]_{z=0}^{a} = -\frac{4}{3}\left[(a^2 - z^2)^{3/2}\right]_{z=0}^{a} = \underline{\underline{\frac{4a^3}{3}}}$$

Ett försök med cylindriska koordinater gav ej enklare beräkningar

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

$0 \leq r \leq a$

$r\cos(\theta) \leq z \leq \sqrt{a^2 - r^2\sin^2(\theta)}$

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \int_{r\cos(\theta)}^{\sqrt{a^2 - r^2\sin^2(\theta)}} r\,dz\,dr\,d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \overbrace{\int_0^a \left(r\sqrt{a^2 - r^2\sin^2(\theta)} - r^2\cos(\theta)\right) dr}^{\overset{\text{def}}{=} I_1(\theta) - I_2(\theta)} d\theta$$

där

$$I_2(\theta) = \cos(\theta)\int_0^a r^2\,dr = \cos(\theta)\frac{a^3}{3}$$

och

$$I_1(\theta) = \begin{bmatrix} u = a^2 - r^2\sin^2(\theta) \\ du = -2r\sin^2(\theta)\,dr \\ r = 0 \Rightarrow u = a^2 \\ r = a \Rightarrow u = a^2\cos^2(\theta) \end{bmatrix} = -\frac{1}{2\sin^2(\theta)} \int_{a^2}^{a^2\cos^2(\theta)} \sqrt{u}\,du =$$

(4)

$$= -\frac{1}{2\sin^2(\theta)}\left[\frac{u^{3/2}}{3/2}\right]_{a^2}^{a^2\cos^2(\theta)} = \frac{a^3}{3\sin^2(\theta)}\left(\underbrace{1 - \cos^3(\theta)}_{= (1-\cos(\theta))(1+\cos(\theta)+\cos^2(\theta))}\right)$$

Detta ger att

$$I_1(\theta) - I_2(\theta) = \frac{a^3}{3}\left(\frac{1 - \cos^3(\theta)}{\sin^2(\theta)} - \frac{\cos(\theta)\cdot(1 - \cos^2(\theta))}{\sin^2(\theta)}\right) = \frac{1 - \cos(\theta)}{\sin^2(\theta)}$$

och

$$V = \frac{4a^3}{3}\int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos(\theta)}{\sin^2(\theta)}\,d\theta = \quad \text{Svårt!}$$

2. Beräkna integralen

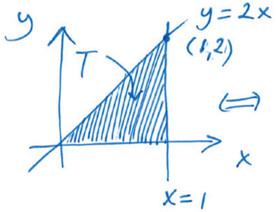
$$I = \int_0^2 \left(\int_{y/2}^1 e^{x^2}\, dx \right) dy.$$

Tips: Rita en skiss av integrationsområdet. Kan man ändra på integrationsordningen? (5 p)

2 | $I = \int_0^2 \left(\int_{y/2}^1 e^{x^2} dx \right) dy$

Primitiv funktion till e^{x^2} kan inte uttryckas i elementära funktioner så vi måste ändra på integrationsordningen för att komma någon vart!

$T: \begin{cases} 0 \le y \le 2 \\ \frac{y}{2} \le x \le 1 \end{cases}$ 1p $\iff$



$\iff \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 2x \end{cases}$ 1p

Således

$I = \int_0^1 \left(\int_0^{2x} e^{x^2} dy \right) dx = \int_0^1 e^{x^2} \Big(\underbrace{\int_0^{2x} dy}_{2x} \Big) dx$

$= \int_0^1 e^{x^2} \cdot 2x\, dx$ 1p $\left[\begin{matrix} u = x^2 \\ du = 2x\, dx \end{matrix} \right] = \int_0^1 e^u du$ 1p

$= \left[e^u \right]_{u=0}^{1} = e^1 - e^0 = \underline{\underline{e-1}}$ 1p

4. Låt C beteckna parametriserade kurva i $\mathbb{R}^2$ som definieras av

$$C: \begin{cases} x = 2\cos t + \cos 2t \\ y = 2\sin t - \sin 2t \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi).$$

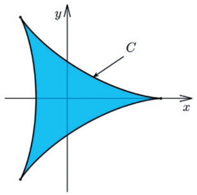
Kurvan är moturs orienterad i sin parametrisering.

a) Beräkna kurvintegralen

$$\oint_C y\, dx.$$

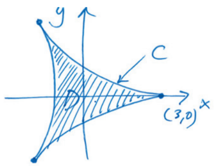
(4 p)

b) Beräkna arean av det område som kurvan C omsluter. *Obs! Fullständig motivering krävs.* (1 p)



4 |

$C: \begin{cases} x = 2\cos t + \cos 2t \\ y = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}$



a) Vi använder parametriseringen för en direkt beräkning

$\oint_C y\,dx = \int_{t=0}^{2\pi} y \cdot \frac{dx}{dt} dt$ 1p $= \int_0^{2\pi} (2\sin t - \sin 2t) \cdot \underbrace{(-2\sin t - 2\sin 2t)}_{dx/dt}$ 1p

$= \int_0^{2\pi} -4\sin^2 t - 4\sin t \sin 2t + 2\sin 2t \sin t + 2\sin^2 2t\, dt$

$= \int_0^{2\pi} -4\underbrace{\sin^2 t}_{=\frac{1}{2}(1-\cos 2t)} - 2\sin t \underbrace{\sin 2t}_{2\cos t \sin t} + 2\underbrace{\sin^2 2t}_{\frac{1}{2}(1-\cos 4t)} dt$

$= \int_0^{2\pi} -1 + 2\cos 2t - 4\sin^2 t \cos t - \cos 4t\, dt$ 1p

$= -2\pi + 0 + 0 - 0 = \underline{\underline{-2\pi}}$ 1p

b) Kurvan C omsluter området D. Enligt Greens sats med $\bar{F}(x,y) = \binom{y}{0}$ gäller

$\oint_C y\,dx = \oint_C \bar{F} \cdot d\bar{r} = \iint_D \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} dA = \iint_D 0 - 1\, dA$

$= -\text{Area}(D) \Rightarrow \text{Area}(D) = \underline{2\pi \text{ a.e.}}$ 1p

THEOREM 6

Green's Theorem

Let R be a regular, closed region in the xy-plane whose boundary, $\mathscr{C}$, consists of one or more piecewise smooth, simple closed curves that are positively oriented with respect to R. If $\mathbf{F} = F_1(x,y)\mathbf{i} + F_2(x,y)\mathbf{j}$ is a smooth vector field on R, then

$$\oint_{\mathscr{C}} F_1(x,y)\,dx + F_2(x,y)\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA.$$

M0055M Tenta 2022-05-30

den 5 juni 2022 09:44

Detta var den mest utmanande uppgiften på den tentan.

B2. Låt T beteckna det tetraederformade område i $\mathbb{R}^3$ vars hörn ligger i punkterna $O=(0,0,0)$, $A=(b,0,0)$, $B=(0,b,0)$ och $C=(b/2,b/2,h)$, där $b>0$ och $h>0$ är givna konstanter.

(a) Beräkna tetraederns volym V med hjälp av formeln

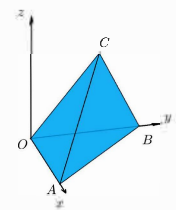
$$V=\frac{\text{Bottenarean}\times\text{Höjden}}{3}.$$

(1 p)

(b) Beräkna koordinaterna (x^*,y^*,z^*) för tetraederns masscentrum som definieras av

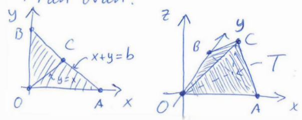
$$x^*=\frac{1}{V}\iiint_T x\,dV,\quad y^*=\frac{1}{V}\iiint_T y\,dV,\quad z^*=\frac{1}{V}\iiint_T z\,dV.$$

(4 p)



B2 | $A=(b,0,0)$, $B=(0,b,0)$, $C=(\frac{b}{2},\frac{b}{2},h)$

Från ovan:



Planet som går genom O, A och C har normalvektor $\bar{N}$ som ges av

$$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\ b&0&0\\ b/2&b/2&h\end{vmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-bh\\b^2/2\end{bmatrix}=b\begin{bmatrix}0\\-h\\b/2\end{bmatrix}$$

$\bar{N}=\begin{bmatrix}0\\-h\\b/2\end{bmatrix}$ Planets ekv. blir därför

$$\bar{N}\cdot\begin{bmatrix}x-0\\y-0\\z-0\end{bmatrix}=0 \iff -hy+\frac{b}{2}z=0\iff$$

$$\boxed{z=\frac{2h}{b}y}$$

På liknande sätt fås att planet som går genom O, B och C har ekvation

$$\boxed{z=\frac{2h}{b}x}$$

Tetraedern begränsas alltså av 4 st plan

$z=0$; $x+y=b$; $z=\frac{2h}{b}x$; $z=\frac{2h}{b}y$

a) Teatraederns volym V beräknas enligt ~~formeln~~

$$V=\frac{\text{Bottenarea}\times\text{Höjd}}{3}=\frac{\frac{b\,b}{2}h}{3}=\underline{\underline{\frac{b^2h}{6}}}\ \text{v.e}$$

b) Eftersom tetraedern är symmetrisk m a p spegling i planet $y=x$ gäller

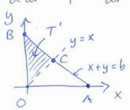
$$\iiint_T x\,dV=\iiint_T y\,dV$$

Således får vi

jämn funktion

$$\iiint_T x\,dV=\frac{1}{2}\iiint_T (x+y)\,dV=\frac{1}{2}\cdot 2\iiint_{T'}(x+y)\,dV$$

där T' är halva tetraedern $(y\geq x)$



$$T':\begin{cases}0\leq x\leq\frac{b}{2}\\ x\leq y\leq b-x\\ 0\leq z\leq\frac{2h}{b}x\end{cases}$$

Enligt symmetriargumentet ovan gäller alltså

$$\iiint_T x\,dV=\iiint_{T'}(x+y)\,dV=\int_0^{b/2}\int_x^{b-x}\int_0^{\frac{2h}{b}x}(x+y)\,dz\,dy\,dx$$

$$=\int_0^{b/2}\int_x^{b-x}(x+y)\cdot\frac{2h}{b}x\,dy\,dx=\frac{2h}{b}\int_0^{b/2}\int_x^{b-x}x^2+xy\,dy\,dx$$

$$=\frac{2h}{b}\int_0^{b/2}\left[x^2y+\frac{1}{2}xy^2\right]_{y=x}^{b-x}dx=\frac{2h}{b}\int_0^{b/2}\frac{1}{2}x\left[2xy+y^2\right]_{y=x}^{b-x}dx$$

$$=\frac{h}{b}\int_0^{b/2}x\underbrace{\left(2x(b-x)+(b-x)^2-(2x^2+x^2)\right)}_{=2\cancel{bx}-2x^2+b^2-2\cancel{bx}+x^2-3x^2=b^2-4x^2}dx$$

$$=\frac{h}{b}\int_0^{b/2}x(b^2-4x^2)\,dx=\frac{h}{b}\int_0^{b/2}b^2x-4x^3\,dx$$

$$=\frac{h}{b}\left[\frac{b^2x^2}{2}-x^4\right]_{x=0}^{b/2}=\frac{h}{b}\left(\frac{b^2}{2}\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^4\right)$$

$$=\frac{h}{b}\cdot\frac{b^4}{8}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{hb^3}{16}$$

Således

$$x^*=y^*=\frac{6}{b^2h}\cdot\frac{hb^3}{16}=\underline{\underline{\frac{3b}{8}}}$$

På liknande sätt fås att

jämn funktion

$$\iiint_T z\,dV=2\iiint_{T'}z\,dV=2\int_0^{b/2}\int_x^{b-x}\int_0^{\frac{2h}{b}x}z\,dz\,dy\,dx$$

$$=2\int_0^{b/2}\int_x^{b-x}\left[\frac{1}{2}z^2\right]_{z=0}^{\frac{2h}{b}x}dy\,dx=\int_0^{b/2}\int_x^{b-x}\left(\frac{2h}{b}x\right)^2dy\,dx$$

$$=\frac{4h^2}{b^2}\int_0^{b/2}\underbrace{x^2(b-2x)}_{=bx^2-2x^3}dx=\frac{4h^2}{b^2}\left[\frac{bx^3}{3}-\frac{x^4}{2}\right]_{x=0}^{b/2}$$

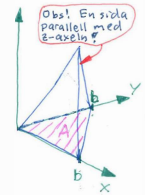
$$=\frac{4h^2}{b^2}\left(\frac{b}{3}\left(\frac{b}{2}\right)^3-\frac{1}{2}\left(\frac{b}{2}\right)^4\right)=\frac{4h^2}{b^2}\cdot\frac{b^4}{8}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{h^2b^2}{2}\cdot\frac{1}{12}=\frac{h^2b^2}{24}$$

Således $z^*=\frac{6}{b^2h}\cdot\frac{h^2b^2}{24}=\underline{\underline{\frac{h}{4}}}$

M0055M Tenta 2022-05-30 sid 2

den 5 juni 2022 10:03

B2 (a)



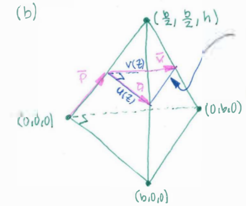
Bottenarea:

$$A=\frac{b\cdot b}{2}=\frac{b^2}{2}$$

Höjd: h

SVAR: $V=\frac{A\cdot h}{3}=\frac{b^2h}{6}$

(b)



Rätvinklig triangel $T(z)$

Likformiga trianglar ger att $u(z)=v(z)=b(1-\frac{z}{h})$

Triangelarea

$$A(z)=\frac{u(z)\,v(z)}{2}=\frac{b^2}{2}\left(1-\frac{z}{h}\right)^2$$

$$Vz^*=\int_0^h zA(z)\,dz=\frac{b^2}{2}\int_0^h z\left(1-\frac{z}{h}\right)^2dz=\frac{b^2}{2}\int_0^h\left(z-\frac{2}{h}z^2+\frac{1}{h^2}z^3\right)dz \quad 9$$

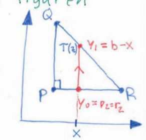
$$=\frac{b^2}{2}\left[\frac{z^2}{2}-\frac{2}{h}\frac{z^3}{3}+\frac{1}{h^2}\frac{z^4}{4}\right]_0^h=\frac{b^2}{2}\left(\frac{h^2\cdot 6}{2\cdot 6}-\frac{2h^2\cdot 4}{3\cdot 4}+\frac{h^2\cdot 3}{4\cdot 3}\right)=$$

$$=\frac{b^2h^2}{2}\cdot\frac{6-8+3}{12}=\frac{b^2h^2}{24}$$

$$z^*=\frac{6}{\cancel{b^2h}}\cdot\frac{\cancel{b^2}h^{\cancel{2}}}{24}=\frac{h}{4}$$

För tvärsnittstriangeln $T(z)$ är vektorerna i figuren

$$\bar{p}=\frac{z}{h}\begin{pmatrix}b/2\\b/2\\h\end{pmatrix},\quad \bar{u}=\frac{h-z}{h}\begin{pmatrix}b\\0\\0\end{pmatrix}\ \text{och}\ \bar{v}=\frac{h-z}{h}\begin{pmatrix}0\\b\\0\end{pmatrix}$$



Hörnpunkterna har alltså lägesvektorer

$$\bar{p},\quad \bar{q}=\bar{p}+\bar{v}=\frac{1}{h}\begin{pmatrix}zb/2+0\\ zb/2+(h-z)b\\ zh+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{b}{2}\cdot\frac{z}{h}\\ b-\frac{b}{2}\cdot\frac{z}{h}\\ \frac{b}{2}\cdot\frac{z}{h}\end{pmatrix}$$

$$\bar{r}=\bar{p}+\bar{u}=\frac{1}{h}\begin{pmatrix}zb/2+(h-z)b\\ zb/2\\ zb/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b-\frac{b}{2}\cdot\frac{z}{h}\\ \frac{b}{2}\cdot\frac{z}{h}\\ \frac{b}{2}\cdot\frac{z}{h}\end{pmatrix}$$

Alltså är

$$Vx^*=\int_0^h\int_{\frac{b}{2}\cdot\frac{z}{h}}^{b-\frac{b}{2}\cdot\frac{z}{h}}\int_{\frac{b}{2}\cdot\frac{z}{h}}^{b-x}x\,dy\,dx\,dz=\int_0^h\int_{\frac{bz}{2h}}^{b-\frac{bz}{2h}}x\cdot\left(b-x-\frac{bz}{2h}\right)dx\,dz=$$

$$=\int_0^h\left[\left(b-\frac{bz}{2h}\right)\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{x=\frac{bz}{2h}}^{x=b-\frac{bz}{2h}}dz=\begin{bmatrix}u=\frac{b}{2h}z\\ du=\frac{b}{2h}dz\\ z=0\Rightarrow u=0\\ z=h\Rightarrow u=\frac{b}{2}\end{bmatrix}=\frac{2h}{b}\int_0^{b/2}\left[(b-u)\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{x=u}^{x=b-u}dz$$

$$=\frac{2h}{b}\int_0^{b/2}\left(\frac{1}{2}\left((b-u)^3-(b-u)u^2\right)-\frac{1}{3}\left((b-u)^3-u^3\right)\right)du=$$

$$=\frac{2h}{b}\int_0^{b/2}\left(\frac{(b-u)^3}{6}-\frac{bu^2}{2}+\overbrace{\frac{u^3}{2}+\frac{u^3}{3}}^{=\frac{5}{6}u^3}\right)du=$$

$$=\frac{2h}{b}\left[-\frac{(b-u)^4}{24}-\frac{bu^3}{6}+\frac{5u^4}{24}\right]_0^{b/2}=\frac{2h}{b}\left(-\frac{b^4}{24\cdot 2^4}-\frac{8\cdot b^4}{8\cdot 6\cdot 2^3}+\frac{5\cdot b^4}{24\cdot 2^4}+\frac{b^4\cdot 16}{24\cdot 16}\right)$$

$$=\frac{\cancel{2}h}{\cancel{b}}\cdot\frac{b^{\cancel{4}3}(-1-8+5+16)}{\cancel{24}_{12}\cdot 16}=\frac{b^3h\cdot\cancel{12}}{\cancel{12}\cdot 16}=\frac{b^3h}{16}\Rightarrow x^*=\frac{6}{\cancel{b^2h}}\cdot\frac{b^{\cancel{3}}\cancel{h}}{16}=\frac{3b}{8}$$

Av symmetriskäl blir även $y^*=x^*=\frac{3b}{8}$

$$\boxed{\text{SVAR: } x^*=y^*=\frac{3b}{8}\ \text{och}\ z^*=\frac{h}{4}}$$

a) Beräkna Jacobianen för variabelbytet

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = xy \end{cases}$$

och uttryck areaelementet $du\,dv$ i $dx\,dy$.

b) Beräkna integralen

$$\iint_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy.$$

11. Låt T beteckna det triangulära område i $\mathbb{R}^2$ vars hörn ligger i punkterna $O = (0,0)$, $A = (2,3)$ och $B = (-1,1)$. Beräkna integralen

$$\iint_T e^{y-2x}\,dA.$$

12. Beräkna arean av det område i planet som i polära koordinater beskrivs av $\sin\theta \le r \le \cos\theta$.

Volymberäkningar.

13. Beräkna volymen av det område som begränsas av konen $z = \sqrt{x^2+y^2}$ och paraboloiden $z = 6 - x^2 - y^2$.

14. Låt U beteckna det område i $\mathbb{R}^3$ som begränsas av ytorna

$$z = 2 - x^2 - 2y^2 \quad \text{och} \quad z = 2x^2 + y^2 - 4.$$

a) Bestäm projektionen i xy-planet av skärningskurvan mellan ytorna.

b) Beräkna volymen av området U.

15. Beräkna volymen av den kropp som innesluts av ytan

$$\sqrt{x^2+y^2} = \cos z, \quad -\frac{\pi}{2} \le z \le \frac{\pi}{2}.$$

16. Låt U beteckna det område i $\mathbb{R}^3$ som ligger under ytan $z = 1 - x^2$ och ovanför ytan $z = y^2 - 1$. Bestäm volymen av området U.

17. Beräkna volymen av området

$$U\colon\ |x| - 1 \le z \le 1 - |y|\,.$$

18. Beräkna volymen av området U som definieras av

$$U\colon \begin{cases} x^2 + y^2 \le a^2 \\ x^2 + z^2 \le a^2 \end{cases} \quad (a > 0).$$

19. Bestäm volymen av det område som begränsas av paraboloiden $z = 3 - x^2 - y^2$ och planet $4x - 6y - z = 0$.

Trippelintegraler.

20. Låt T beteckna den tetraeder i $\mathbb{R}^3$ vars hörn ligger i punkterna $(0,0,1)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$ samt origo. Beräkna integralen

$$\iiint_T x^2 + y^2\,dV.$$

21. Beräkna

$$\iiint_T (y+z)\,dV$$

om $T\colon x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0, x + y + z \le 2$.

22. Låt K beteckna den kon som definieras av

$$K\colon \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2,$$

där x, y och z mäts i enheten [m]. Beräkna konens totala massa om materialdensiteten är

$$\rho(x,y,z) = x^2 z \quad [\mathrm{kg/m^3}].$$

23. Beräkna massan av kroppen $V: x^2 + y^2 \le z \le 1$ om kroppens densitet är

$$\rho(x,y,z) = (1-z)(1 - \sqrt{x^2+y^2}).$$

24. Låt K beteckna klotet $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$ av radie $a > 0$. Beräkna integralerna

a)

$$\iiint_K \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dV,$$

b)

$$\iiint_K \sqrt{x^2+y^2}\,dV.$$

25. Beräkna trippelintegralen

$$\iiint_E \left(2x + z^3\right)dV,$$

där $E\colon x^2 + y^2 + z^2 \le 1, x \ge 0$.

26. Låt U vara det område i $\mathbb{R}^3$ som definieras av

$$U\colon \begin{cases} |y| \le x \le 1 \\ 0 \le z \le x - |y|\,. \end{cases}$$

Beräkna integralen

$$\iiint_U \frac{1}{1+x^3}\,dV.$$

27. Beräkna integralen

$$\iiint_K 3x^2 + 2y^2 + z^2\,dV$$

där K betecknar klotet $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$.

28. Låt P beteckna det pyramidformade område i $\mathbb{R}^3$ vars hörn utgörs av punkterna $A = (1,0,0)$, $B = (0,1,0)$, $C = (-1,0,0)$, $D = (0,-1,0)$ och $E = (0,0,2)$. Beräkna integralen

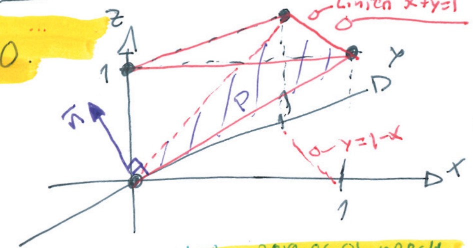
$$\iiint_P z\,dV.$$

29. Låt P beteckna pyramiden som har en kvadratisk basyta med hörn i punkterna $(0,0,0)$, $(2,0,0)$, $(2,2,0)$ och $(0,2,0)$, samt ett femte hörn i punkten $(0,0,3)$. Beräkna

$$\iiint_P x^2 y\,dV.$$

Tentamensproblem block III, Trippelintegraler

20.



Området $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1-x$, $x+y \le z \le 1$

$$\bar{n} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\cdot1-1\cdot1\\1\cdot0-1\cdot1\\1\cdot1-0\cdot0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

Planet P har ekvation

$$-x-y+z=0$$

$$z = x+y$$

Kortare lösning som i tenta 2019-06-01 uppg 4: Eftersom området är symmetriskt kring planet $y=x$ och integranden $f(x,y) = x^2+y^2 = f(y,x)$ så är $I = 2\iiint x^2\,dV$, vilket är en enklare integral att räkna ut.

$$I = \int_0^1\int_0^{1-x}\int_{x+y}^1 (x^2+y^2)\,dz\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^{1-x}(x^2+y^2)\cdot\Big[z\Big]_{x+y}^1\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^1\int_0^{1-x}(x^2+y^2)\cdot(1-x-y)\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^{1-x}(x^2-x^3-x^2y+y^2-xy^2-y^3)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \Big[(x^2-x^3)y - x^2\cdot\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3}(1-x) - \frac{y^4}{4}\Big]_{y=0}^{y=1-x}\,dx =$$

$$= \int_0^1 \left((x^2-x^3)(1-x) - \frac{x^2}{2}(1-x)^2 + \frac{(1-x)^4}{3} - \frac{(1-x)^4}{4}\right)dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\left(x^2-x^3-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}\right)(1-x) + (1-x)^4\left(\frac{1\cdot4}{3\cdot4}-\frac{1\cdot3}{4\cdot3}\right)\right)dx =$$

$$= \int_0^1\left(\frac12\underbrace{(x^2-x^3)}_{=x^2(1-x)}(1-x) + \frac{1}{12}(1-x)^4\right)dx = \int_0^1\left(\frac12 x^2(1-x)^2 + \frac{1}{12}(1-x)^4\right)dx =$$

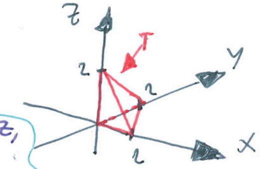
$$\overbrace{=x^2-x^3-x^3+x^4 = x^2-2x^3+x^4}$$

$$= \int_0^1\left(\frac12(x^2-2x^3+x^4) + \frac{1}{12}(1-x)^4\right)dx = \left[\frac12\left(\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right) - \frac{1}{12}\frac{(1-x)^5}{5}\right]_0^1$$

$$= \frac12\left(\frac{1\cdot10}{3\cdot10} - \frac{1\cdot15}{2\cdot15} + \frac{6\cdot1}{6\cdot5}\right) - 0 - \frac12\cdot0 + \frac{1}{12}\cdot\frac15 = \frac12\cdot\frac{1}{30} + \frac{1}{60} = \frac{2}{60} = \frac{1}{30}$$

$$I = \iiint_T (x^2+y^2)\,dV = \underbrace{\iiint_T x^2\,dV + \iiint_T y^2\,dV}_{\text{Byt namn på variablerna x och y}} = \iiint_T x^2\,dV + \iiint_T x^2\,dV = 2\iiint_T x^2\,dV$$

21 T: $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$, $x+y+z \le 2$



T: $0 \le z \le 2$, $0 \le y \le 2-z$, $0 \le x \le 2-y-z$

T är symmetrisk kring planet $y=z$, så byter vi namn på y och z så är integrationsområdet fortfarande samma

$$I = \iiint_T (y+z)\,dV = \iiint_T y\,dV + \underbrace{\iiint_T z\,dV}_{\text{Byt namn på y och z}} = \iiint_T y\,dV + \iiint_T y\,dV =$$

$$= 2\iiint_T y\,dV = 2\int_0^2\int_0^{2-z} y\int_0^{2-y-z}dx\,dy\,dz = 2\int_0^2\int_0^{2-z} y(2-y-z)\,dy\,dz =$$

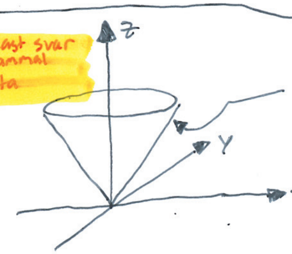
$$= 2\int_0^2\int_0^{2-z}\left((2-z)y - y^2\right)dy\,dz = 2\int_0^2\left[(2-z)\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=2-z}dz =$$

$$= 2\int_0^2 (2-z)^3\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot3} - \frac{1\cdot2}{3\cdot2}\right)dz = \frac13\int_0^2(2-z)^3\,dz = \frac13\left[-\frac{(2-z)^4}{4}\right]_0^2 =$$

$$= \frac13\left(-0 + \frac{16}{4}\right) = \frac43$$

---

22 Endast svar i gammal tenta



K: $0 \le z \le 2$, $0 \le \sqrt{x^2+y^2} \le 2z$

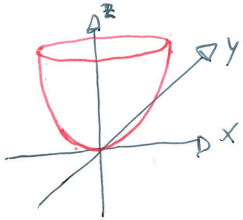
Med cylindriska koordinater blir massan

$$M = \iiint_K x^2 z\,dV = \int_0^2\int_0^{2z}\int_0^{2\pi} r^2\underbrace{\cos^2(\theta)}_{=\frac{1+\cos(2\theta)}{2}}\, z\, r\,d\theta\,dr\,dz = \frac12\int_0^2 z\int_0^{2z}\Big[\theta + \tfrac12\sin(2\theta)\Big]_0^{2\pi} r^3\,dr\,dz$$

$$= \pi\int_0^2 z\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{2z}dz = 4\pi\int_0^2 z^5\,dz = 4\pi\left[\frac{z^6}{6}\right]_0^2 = \frac{2\pi\cdot64}{3} = \frac{128\pi}{3}$$

$$M = \frac{128\pi}{3}\text{ kg}$$

23



$$V: \begin{cases} 0 \le z \le 1 \\ 0 \le r \le \sqrt{z} \end{cases} \quad \Bigg| \quad V: \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ r^2 \le z \le 1 \end{cases}$$

Med cylindriska koordinater: (sid 850 - 851)

$$M = \int_0^1 \int_{r^2}^1 \int_0^{2\pi} (1-z)(1-r) \; r \, d\theta \, dz \, dr = 2\pi \int_0^1 (r-r^2)\left[z - \frac{z^2}{2}\right]_{r^2}^1 dr =$$

$$= 2\pi \int_0^1 (r-r^2)\left(1 - \frac{1}{2} - r^2 + \frac{r^4}{2}\right) dr = \pi \int_0^1 \overbrace{(r^2-r)(1-2r^2+r^4)}^{= r(r-1)(1-r^2)^2 = r(r-1)^3(r+1)^2} dr =$$

$$= -\pi \int_0^1 (r^2 - 2r^4 + r^6 - r + 2r^3 - r^5)\, dr =$$

$$= -\pi \left[\frac{r^3}{3} - 2\frac{r^5}{5} + \frac{r^7}{7} - \frac{r^2}{2} + 2\cdot\frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{6}\right]_0^1 =$$

$$= -\pi \left(\frac{1\cdot 70}{3\cdot 70} - \frac{2\cdot 7\cdot 6}{5\cdot 7\cdot 6} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 2}{7\cdot 3\cdot 5\cdot 2} - \frac{1}{2} + \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1\cdot 35}{6\cdot 35}\right) = -\pi \frac{70 - 84 + 30 - 35}{210} = -\pi \frac{-14-5}{210}$$

$$= \frac{19\pi}{210} \text{ massenheter}$$

sid 852-853

Sfäriska koordinater:

24 a)

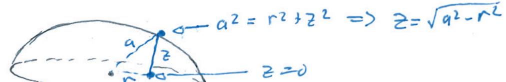
$$\iiint_K \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dV = \int_0^a \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \rho \; \rho^2 \sin(\phi)\, d\theta\, d\phi\, d\rho =$$

$$= 2\pi \int_0^a \rho^3 \left[-\cos(\phi)\right]_0^{\pi} d\rho = \cancel{4}\pi \left[\frac{\rho^4}{\cancel{4}}\right]_0^a = \pi a^4$$

b) Cylindriska koordinater:

$$\iiint_K \sqrt{x^2+y^2}\, dV = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} \int_0^{2\pi} r \cdot r \, d\theta\, dz\, dr = 2\pi \int_0^a r^2 \sqrt{a^2-r^2}\, dr = ?$$

$$\iiint_K \sqrt{x^2+y^2}\, dV = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-z^2}} \int_0^{2\pi} r \cdot r \, d\theta\, dr\, dz = 2\pi \int_0^a \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{\sqrt{a^2-z^2}} dz = ?$$



24 b) forts...

Provar sfäriska koordinater istället, med

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\rho^2 \sin^2(\phi)\cos^2(\theta) + \rho^2 \sin^2(\phi)\sin^2(\theta)} =$$

$$= \rho \sin(\phi),$$

vilket ger

$$\iiint_K \sqrt{x^2+y^2}\, dV = \int_0^a \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \rho \sin(\phi)\, \rho^2 \sin(\phi)\, d\theta\, d\phi\, d\rho =$$

$$= 2\pi \int_0^a \rho^3 \int_0^{\pi} \sin^2(\phi)\, d\phi\, d\rho = \pi \int_0^a \rho^3 \int_0^{\pi} (1 - \cos(2\phi))\, d\phi\, d\rho =$$

$$= \pi \int_0^a \rho^3 \left[\phi - \tfrac{1}{2}\sin(2\phi)\right]_0^{\pi} d\rho = \pi^2 \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^a = \frac{\pi^2 a^4}{4}$$

25 $E: \; x^2+y^2+z^2 \le 1, \quad x \ge 0$ (Halvklot)

Udda funktion av z

$$\iiint_E (2x+z^3)\, dV = \iiint_E 2x\, dV + \iiint_E z^3\, dV = \iiint_E 2x\, dV + 0 =$$

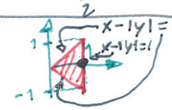
E ← Symmetrisk kring xy-planet

$$= \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} 2\rho \sin(\phi)\cos(\theta)\, \rho^2 \sin(\phi)\, d\phi\, d\theta\, d\rho =$$

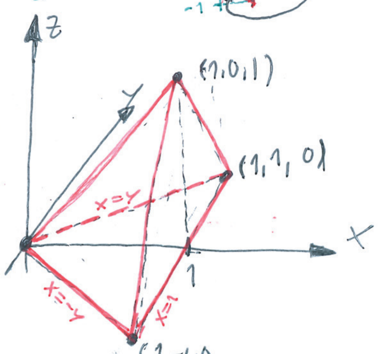
$$= \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 \cdot \left[\phi - \tfrac{1}{2}\sin(2\phi)\right]_0^{\pi} \cdot \left[\sin(\theta)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 2 = \frac{\pi}{2}$$

26

$$U: \begin{cases} |y| \le x \le 1 \\ 0 \le z \le x - |y| \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ -x \le y \le x \end{cases}$$



För respektive kvadrant i x-y-planet är övre gränsyta z = x-|y| ett plan, och därmed helt bestämt av tre punkter i planet som ej ligger på samma linje.



26 forts...

Jämn funktion av y

$$\iiint_U \frac{1}{1+x^3}\,dV = 2\int_0^1 \frac{1}{1+x^3}\int_0^x\int_0^{x-y} dz\,dy\,dx = 2\int_0^1\frac{1}{1+x^3}\int_0^x (x-y)\,dy\,dx =$$

$$= 2\int_0^1 \frac{1}{1+x^3}\left[xy-\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=x} dx =$$

$$=2\int_0^1 \frac{1}{1+x^3}\left(x^2-\frac{x^2}{2}\right)dx = \frac13\int_0^1\frac{3x^2}{1+x^3} = \frac13\left[\ln(1+x^3)\right]_0^1 =$$

$$=\frac13\left(\ln(2)-\overbrace{\ln(1)}^{=0}\right) = \underline{\underline{\frac13\ln(2)}}$$

27 Av symmetriskäl blir integralen lika med

$$6\iiint_K x^2\,dV = 6\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\int_0^a \rho^2\sin^2(\phi)\cos^2(\theta)\,\rho^2\sin(\phi)\,d\rho\,d\theta\,d\phi$$

$u=\cos(\phi)$
$du=-\sin(\phi)\,d\phi$

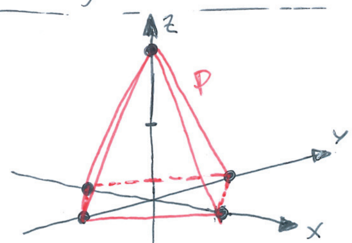
$$=6\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^a\cdot\int_0^\pi \sin(\phi)(1-\cos^2(\phi))\,d\phi\cdot\frac12\int_0^{2\pi}(1+\cos(2\theta))\,d\theta=$$

$$=6\frac{a^5}{5}\cdot\left(-\int_1^{-1}(1-u^2)\,du\right)\cdot\frac12\left[\theta+\frac12\sin(2\theta)\right]_0^{2\pi}=$$

$$=6\frac{\pi a^5}{5}\left[u-\frac{u^3}{3}\right]_{-1}^1 = 6\frac{\pi a^5}{5}\left(1-\frac13+1-\frac13\right)=\frac{6\pi a^5}{5}\cdot\frac43=$$

$$=\frac{8\pi a^5}{5}$$

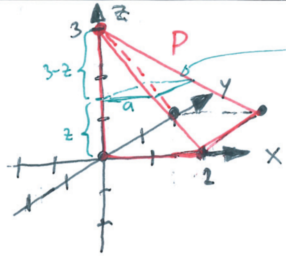
28



$$\iiint_P z\,dV = 4\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{2(1-x-y)} z\,dz\,dy\,dx = 8\int_0^1\int_0^{1-x}(1-x-y)^2\,dy\,dx = 8\int_0^1\left[-\frac{(1-x-y)^3}{3}\right]_{y=0}^{y=1-x}dx$$

$$=\frac83\int_0^1(1-x)^3\,dx = \frac23\left[-(1-x)^4\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac23}}$$

29



Kvadrat med sidlängd a, där

$$\frac{3-z}{a} = \frac32$$

$$2\cdot(3-z) = 3a$$

$$6-2z = 3a$$

$$a(z) = \frac{6-2z}{3} = \frac23(3-z)$$

$$\iiint_P x^2y\,dV = \int_0^3\int_0^{a(z)}x^2\int_0^{a(z)} y\,dy\,dx\,dz = \int_0^3\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{a(z)}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{a(z)}dz=$$

$$=\int_0^3\frac{a(z)^3}{3}\cdot\frac{a(z)^2}{2}\,dz = \frac16\int_0^3 a(z)^5\,dz = \frac16\cdot\left(\frac23\right)^5\left[-\frac{(3-z)^6}{6}\right]_0^3=$$

$$=\frac{2^3}{3^7}\left(-0+3^6\right) = \underline{\underline{\frac83}}$$

den 3 maj 2021 09:35

Inget nytt på följande sidor, bara en sammanställning av lösningar som redan finns i kursens Canvasrum.

Tentamensproblem — IV. Vektoranalys

Kurvintegraler, parametriserade kurvor.

1. Låt **F** beteckna vektorfältet

$$\mathbf{F}(x,y) = xy\,\mathbf{i} + (x^3 + y^2)\,\mathbf{j}.$$

a) Är fältet **F** konservativt eller inte?
b) Beräkna kurvintegralen

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r},$$

där C är den riktade parametriserade kurva som definieras av

$$C\colon \mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + t^3\,\mathbf{j} \quad (0 \le t \le 1).$$

1. a) **F** är *inte* konservativt, ty

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 3x^2 - x \neq 0.$$

b) En direkt beräkning med parametriseringen av C ger

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{t=0}^{1} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\,dt = \frac{20}{21}.$$

(190321:5)

2. Låt

$$\mathbf{F}(x,y) = y^2\,\mathbf{i} + \cos x\,\mathbf{j}.$$

a) Är vektorfältet **F** konservativt eller inte?
b) Beräkna kurvintegralen

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

om C är den parametriserade kurvan

$$C\colon \begin{cases} x = t \\ y = \sin t \end{cases} \qquad -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

2. a) **F** är *inte* konservativt, ty

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = -\sin x - 2y \neq 0.$$

b) En direkt beräkning med parametriseringen av C ger

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{t=-\pi/2}^{\pi/2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\,dt = \pi.$$

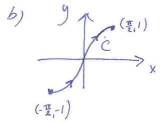
(170113:4)

4] $\bar F(x,y) = y^2\hat\imath + \cos x\,\hat\jmath = F_1\hat\imath + F_2\hat\jmath$

a) För konservativa fält gäller $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0$ överallt.

$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\cos x) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2) = -\sin x - 2y \neq 0$

för vissa (x,y). Alltså är $\bar F$ inte konservativt.

b) 

$C:\ \bar r(t) = \begin{bmatrix} t \\ \sin t \end{bmatrix} \quad -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$

$\frac{d\bar r}{dt} = \begin{bmatrix} 1 \\ \cos t \end{bmatrix}$

En parametriserad kurvintegral beräknas enligt

$$\int_C \bar F\cdot d\bar r = \int_{t=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \bar F(\bar r(t))\cdot\frac{d\bar r}{dt}\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \begin{bmatrix} \sin^2 t \\ \cos t \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ \cos t \end{bmatrix} dt$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_{1}\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt = \underline{\underline{\pi}}$$

3. Låt C vara den kurva i $\mathbb{R}^3$ som parametriseras av

$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + e^t\,\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 1.$$

Beräkna

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

om $\mathbf{F}(x,y,z) = 2xy\,\mathbf{i} + x^2\,\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

3. En direkt beräkning med parametriseringen av C ger

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{t=0}^{1} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\,dt = 2 - e.$$

(150116:3)

3] $\bar F(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2xy \\ x^2 \\ -1 \end{bmatrix}$

$C:\ \bar r(t) = \begin{bmatrix} t \\ t^2 \\ e^t \end{bmatrix},\ 0 \le t \le 1 \qquad \frac{d\bar r}{dt} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2t \\ e^t \end{bmatrix}$

Metod 1 (direkt beräkning).

$$\int_C \bar F\cdot d\bar r = \int_{t=0}^{1} \bar F(\bar r(t))\cdot\frac{d\bar r}{dt}\,dt = \int_0^1 \begin{bmatrix} 2t^3 \\ t^2 \\ -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 2t \\ e^t \end{bmatrix} dt$$

$$= \int_0^1 2t^3 + 2t^3 - e^t\,dt = \int_0^1 4t^3 - e^t\,dt$$

$$= \Big[t^4 - e^t\Big]_0^1 = 1 - e^1 - (0 - e^0) = \underline{\underline{2-e}}$$

Metod 2 (konservativt fält):

$\bar F$ är konservativt, d.v.s. $\bar F = \nabla\phi$. En potential är $\phi(x,y,z) = x^2y - z$. C går från $(0,0,1)$ till $(1,1,e)$. Således

$$\int_C \bar F\cdot d\bar r = \phi(1,1,e) - \phi(0,0,1) = 1^2\cdot 1 - e - (0^2\cdot 0 - 1)$$
$$= \underline{\underline{2-e}}$$

den 3 maj 2021 10:11

4. Beräkna kurvintegralen

$$\oint_C 2xy\,dz$$

där C är skärningskurvan mellan ytorna $x^2 + y^2 = 3$ och $z = x^2 - y^2$ som genomlöps moturs sett från punkten $(0,0,4)$.

4. Kurvan C kan parametriseras enligt

$$\begin{cases} x = \sqrt{3}\cos t \\ y = \sqrt{3}\sin t \\ z = 3\cos(2t) \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi).$$

Således

$$\oint_C 2xy\,dz = \int_{t=0}^{2\pi} 2xy\frac{dz}{dt}\,dt = -18\pi.$$

(130829:4)

4. Kurvan C har parametriseringen

$$\begin{cases} x = \sqrt{3}\cos t \\ y = \sqrt{3}\sin t \\ z = 3(\cos^2 t - \sin^2 t) = 3\cos 2t \end{cases}, \quad 0 \le t < 2\pi$$

$$\oint 2xy\,\hat k\cdot d\bar r = \int_0^{2\pi} (0,0,2\cdot 3\cos t\sin t)\cdot\begin{pmatrix} -\sqrt{3}\sin t \\ \sqrt{3}\cos t \\ -6\sin 2t \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -18\sin^2 2t\,dt = \int_0^{2\pi} 9(\cos 4t - 1)\,dt$$

$$= \underline{\underline{-18\pi}}$$

Kurvintegraler av konservativa fält.

5. Låt **F** beteckna vektorfältet

$$\mathbf{F}(x,y) = (x^2y + 2x)e^{xy}\,\mathbf{i} + x^3e^{xy}\,\mathbf{j}.$$

a) Visa att **F** är ett konservativt fält. Bestäm en potential till **F**.
b) Beräkna kurvintegralen

$$\int_C (x^2y + 2x)e^{xy}\,dx + x^3e^{xy}\,dy,$$

där C är den del av kurvan $y = 5 - x^2$ som börjar i $x = -2$ och slutar i $x = 2$.

5. a) En potential till **F** är

$$\phi(x,y) = x^2e^{xy} + C$$

där C är en godtycklig konstant.
b) Med hjälp av potentialen fås

$$\int_C (x^2y + 2x)e^{xy}\,dx + x^3e^{xy}\,dy = \phi(2,1) - \phi(-2,1) = 4(e^2 - e^{-2})$$

(160825:5)

5] $\bar F(x,y) = (x^2y + 2x)\,e^{xy}\,\hat\imath + x^3e^{xy}\,\hat\jmath$

a) $\bar F$ är konservativt om det finns en skalär funktion $\phi(x,y)$ kallad potential sådan att

$$\bar F(x,y) = \nabla\phi(x,y) = \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat\imath + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat\jmath$$

Ett nödvändigt villkor för att detta ska gälla är $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$. En enkel kontroll visar att så är fallet.

För att bestämma potentialen ϕ utnyttjar vi

$$\begin{cases} \frac{\partial\phi}{\partial x} = (x^2y + 2x)e^{xy} & (1) \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} = x^3e^{xy} & (2) \end{cases}$$

Integration av (2) m.a.p. y ger

$$\phi(x,y) = \int x^3e^{xy}\,dy + C(x) = x^2e^{xy} + C(x)$$

där $C(x)$ är en godtycklig funktion av x. Insättning i (1) ger

$$2x\cdot e^{xy} + x^2\cdot(y\,e^{xy}) + C'(x) = (x^2y + 2x)\,e^{xy}$$

$\Rightarrow C'(x) = 0$ d.v.s. C är en konstant.

Alltså är

$$\phi(x,y) = x^2e^{xy} + C$$

en potential till $\bar F$ för varje reell konstant C.

För enkelhets skull väljer vi $C = 0$.

Svar: $\phi(x,y) = x^2e^{xy}$ är en potential till $\bar F$.

b) $C:\ \begin{cases} y = 5 - x^2 \\ -2 \le x \le 2 \end{cases}$

$x = \pm 2 \Rightarrow y = 5 - (\pm 2)^2 = 1$

Kurvan går alltså från $(-2,1)$ till $(2,1)$. Eftersom $\bar F$ är konservativt gäller

$$\int_C \bar F\cdot d\bar r = \phi(2,1) - \phi(-2,1)$$
$$= 2^2\cdot e^{2\cdot 1} - (-2)^2\cdot e^{(-2)\cdot 1}$$
$$= \underline{\underline{4(e^2 - e^{-2})}}$$

Kommentar: Om man misslyckats med att beräkna potentialen kan kurvintegralen beräknas med vanlig parametrisering (fast det blir givetvis lite krångligare då).

6. Låt **F** beteckna vektorfältet

$$\mathbf{F}(x,y) = (Ax^2y + y^3 + 1)\,\mathbf{i} + (2x^3 + Bxy^2 + 2)\,\mathbf{j},$$

där konstanterna A och B väljs så att vektorfältet blir konservativt.
a) Bestäm konstanterna A och B.
b) Beräkna kurvintegralen

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

om C är kurvan

$$C: \mathbf{r}(t) = \frac{t^3-t}{t+1}\,\mathbf{i} + \frac{t^2+t}{t+4}\,\mathbf{j} \quad (0 \le t \le 2).$$

6. a) **F** är konservativt om $A = 6$ och $B = 3$.
b) Med hjälp av potentialen

$$\phi(x,y) = 2x^3y + y^3x + x + 2y + C$$

fås

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \phi(2,1) - \phi(0,0) = 22.$$

(191024:5)

---

7. Låt

$$\mathbf{F}(x,y,z) = Ax^3y\,\mathbf{i} + (x^4 + By^2z^2)\,\mathbf{j} + 2y^3z\,\mathbf{k},$$

där A och B är två reella konstanter.
a) Beräkna rotationen av vektorfältet **F**, d v s beräkna $\nabla \times \mathbf{F}$.
b) För vilka värden på A och B är vektorfältet konservativt? Bestäm en potential till **F** för dessa värden.
c) Välj A och B enligt b). Beräkna kurvintegralen

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r},$$

där C är den kortaste väg på sfären $x^2+y^2+z^2 = 4$ som går från punkten $P = (\sqrt{3},0,1)$ till punkten $Q = (1,1,\sqrt{2})$.

7. a)

$$\nabla \times \mathbf{F} = (6-2B)y^2z\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + (4-A)x^3\,\mathbf{k}.$$

b) **F** konservativt medför att $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ överallt. Detta ger $A = 4$ och $B = 3$. Potentialen blir då

$$\phi(x,y,z) = x^4y + y^3z^2 + C,$$

där C är en godtycklig konstant.
c) För $A = 4$ och $B = 3$ gäller

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \phi(1,1,\sqrt{2}) - \phi(\sqrt{3},0,1) = 3.$$

(180313:4)

Greens sats.

8. Beräkna kurvintegralen

$$\oint_C (x^2-y^2)\,dx + (x-xy)\,dy,$$

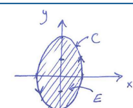
där C är ellipsen $4x^2+y^2 = 4$ som genomlöps moturs.

8. Greens sats ger

$$\oint_C (x^2-y^2)\,dx + (x-xy)\,dy = \iint_{4x^2+y^2\le 4} (1+y)\,dA = 2\pi.$$

(161220:5)

$\underline{5|}$



Kurvan C omsluter ellipsskivan $E: 4x^2+y^2 \le 4$.

Greens sats ger

$$\oint_C (x^2-y^2)dx + (x-xy)dy = \iint_E \frac{\partial}{\partial x}(x-xy) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2-y^2)\,dA$$

$$= \iint_E 1 - y - (0-2y)\,dA = \iint_E 1+y\,dA$$

Variabelbytet $\begin{cases} x = u \\ y = 2v \end{cases}$ ger $J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$

Alltså

$$dA = dx\,dy = J(u,v)\,du\,dv = 2\,du\,dv \quad \Rightarrow$$

$$\iint_E (1+y)\,dA = \iint_{u^2+v^2\le 1} (1+2v)\,2\,du\,dv = 2\iint_{u^2+v^2\le 1} (1+2v)\,du\,dv$$

$$= 2(\pi + 0) = \underline{\underline{2\pi}}$$

---

9. Beräkna kurvintegralen

$$\int_C y^2\cos x\,dx + (2y\sin x + x + 1)\,dy$$

som går längs halvcirkelbågen

$$C: x^2+y^2 = 4, \quad x \le 0$$

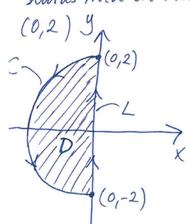
från punkten $(0,2)$ till $(0,-2)$.

9. Använd gärna Greens sats, men kurvan är inte sluten, så den måste slutas till på ett lämpligt sätt först.

$$\int_C y^2\cos x\,dx + (2y\sin x + x + 1)\,dy = 2\pi - 4.$$

(130603:4)

$\boxed{4}$ Kurvan C är inte sluten men kan slutas med en rät linje L mellan $(0,-2)$ och $(0,2)$



Enligt Greens sats gäller

$$\oint_{C\cup L} F_1\,dx + F_2\,dy = \iint_D \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\,dA \Rightarrow$$

$$\int_C y^2\cos x\,dx + (2y\sin x + x + 1)dy$$

$$= \iint_D 2y\cos x + 1 - 2y\cos x\,dA - \int_L y^2\cos x\,dx + (2y\sin x + x + 1)dy$$

$$= \iint_D 1\,dA - \int_{-2}^{2} 1\,dy = \underline{\underline{2\pi - 4}}$$

10. Låt C vara den kurva i $\mathbb{R}^2$ som definieras av

$$C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0.$$

Beräkna kurvintegralen

$$\int_C (2x-3y)\,dx + (5x+6y)\,dy.$$

Antag att C genomlöps i en sådan riktning att y-koordinaten ökar.

10. Använd gärna Greens sats. Observera att C *inte* är sluten!

$$\int_C (2x-3y)\,dx + (5x+6y)\,dy = 12\pi + 3.$$

a) C är en ellipsbåge som går från punkten $(3,0)$ till $(0,2)$. (181025:5)

b) Använd gärna Greens sats. Observera att C *inte* är sluten!

$$\int_C (2x-3y)\,dx + (5x+6y)\,dy = 12\pi + 3.$$

---

11. Parameterkurvan

$$C: \mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} 2\cos t + \sin t \\ 3\cos t - 2\sin t \end{bmatrix} \quad (0 \le t \le 2\pi).$$

beskriver en ellips i planet som är *medurs* orienterad.
a) Beräkna kurvintegralen

$$\oint_C x\,dy$$

genom att använda parametriseringen för C.
b) Använd Greens sats för att bestämma arean av det område som omsluts av kurvan C.

11. a) En direkt beräkning med parametriseringen ger

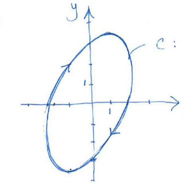
$$\oint_C x\,dy = \int_{t=0}^{2\pi} x\frac{dy}{dt}\,dt = -7\pi.$$

b) Låt D beteckna det område som omsluts av C. Av Greens sats följer att

$$\text{Area}(D) = -\oint_C x\,dy = 7\pi \text{ a.e.}$$

(180529:5)

$5|$



$C: \bar{r}(t) = \begin{bmatrix} 2\cos t + \sin t \\ 3\cos t - 2\sin t \end{bmatrix} \quad (0 \le t \le 2\pi)$

$\frac{d\bar{r}}{dt} = \begin{bmatrix} -2\sin t + \cos t \\ -3\sin t - 2\cos t \end{bmatrix}$

a)

$$\oint_C x\,dy = \int_{t=0}^{2\pi} x\cdot\frac{dy}{dt}\,dt = \int_0^{2\pi} (2\cos t + \sin t)\cdot(-3\sin t - 2\cos t)\,dt$$

$$= -\int_0^{2\pi} \underbrace{4\cos^2 t + 3\sin^2 t}_{3+\cos^2 t} + \underbrace{8\cos t\sin t}_{4\sin 2t}\,dt$$

$$= -\left(\int_0^{2\pi} 3 + \underbrace{\cos^2 t}_{\frac{1}{2}(1+\cos 2t)}\,dt + 4\int_0^{2\pi} \sin 2t\,dt\right)$$

$$= -\left(3\cdot 2\pi + \tfrac{1}{2}\cdot(2\pi + 0) + 4\cdot 0\right) = \underline{\underline{-7\pi}}$$

b) $\bar{F}(x,y) = \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix} \Rightarrow \oint_C \bar{F}\cdot d\bar{r} = \oint_C 0\cdot dx + x\cdot dy = \oint_C x\,dy$

Eftersom C är medurs orienterad gäller Greens sats med ett minustecken framför HL:

$$\oint_C \bar{F}\cdot d\bar{r} = -\iint_D \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\,dA = -\iint_D 1 - 0\,dA = -\text{Area}(D)$$

Obs!

Alltså $\text{Area}(D) = -\oint_C x\,dy = \underline{\underline{7\pi}}$ [a.e]

---

12. Låt C vara den kurva i planet vars parametrisering ges av

$$C: \mathbf{r}(t) = t(1-t)\,\mathbf{i} + t^2(1-t)\,\mathbf{j} \quad (0 \le t \le 1).$$

C genomlöps i en sådan riktning att t ökar.
a) Beräkna kurvintegralen

$$\oint_C x\,dy.$$

b) Beräkna arean av det område som omsluts av kurvan C. (Kurvan korsar inte sig själv i någon punkt.)

12. a) En direkt beräkning med parametriseringen ger

$$\oint_C x\,dy = \int_{t=0}^{1} x\frac{dy}{dt}\,dt = \frac{1}{60}.$$

b) Låt R beteckna det område som omsluts av C. Av Greens sats följer att

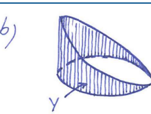
$$\text{Area}(R) = \oint_C x\,dy = \frac{1}{60} \text{ a.e.}$$

(171019:5)

Ytintegraler.

13. Beräkna arean av den del av cylindern $x^2+y^2 = 4$ som ligger mellan planen $z = x+2$ och $z = 0$.

b)



Den sökta ytan Y beskrivs av

$$Y: x^2+y^2 = 4,\ 0 \le z \le x+2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = 2 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le z \le 2\cos\theta + 2 \end{cases} \text{(cyl. koord.)}$$

Ytelementet för cylindern $x^2+y^2 = 4$ ges av

$$dS = 2\,d\theta\,dz$$

$$\text{Area}(Y) = \iint_Y dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\cos\theta+2} 2\,dz\,d\theta$$

$$= 2\cdot\int_0^{2\pi} 2\cos\theta + 2\,d\theta$$

$$= 2\cdot(0 + 2\cdot 2\pi) = \underline{\underline{8\pi}}$$

den 3 maj 2021 20:58

14. Låt T vara den parametriserade ytan i $\mathbb{R}^3$ som definieras av

$$T: \mathbf{r}(s,t) = s\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} \quad (0 \le s \le 1,\ 0 \le t \le 1-s).$$

a) Beräkna arean av T. *Tips: T är en triangel.*
b) Beräkna ytintegralen

$$\iint_T e^{x+y+z}\, dS.$$

14. a) Areaelementet för T är $dS = \sqrt{3}\, ds\, dt$. Arean blir därför $\sqrt{3}/2$ a.e.
b)

$$\iint_T e^{x+y+z} dS = \frac{\sqrt{3}}{4}(e^2+1).$$

(180313:6)

15. Låt Σ beteckna den yta som definieras av $z = 1 - x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 \le 1$. Beräkna arean av Σ.

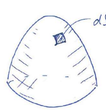
15.

$$\text{Area}(\Sigma) = \iint_\Sigma dS = \iint_{x^2+y^2\le 1} \sqrt{1+4x^2+4y^2}\, dx\, dy = \frac{\pi}{6}(5^{3/2}-1) \text{ a.e.}$$

(150317:5)

5|

$$\Sigma: \begin{cases} x^2+y^2 \le 1 \\ z = 1-x^2-y^2 \end{cases}$$



Ytelement för Σ (funktionsyta): $z = 1-x^2-y^2$

$$dS = \underbrace{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}_{dxdy} = \sqrt{1+(-2x)^2+(-2y)^2}\, dxdy$$

$$dS = \underbrace{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}_{dxdy} = \sqrt{1+(-2x)^2+(-2y)^2}\, dxdy$$

$$= \sqrt{1+4(x^2+y^2)}\, dxdy$$

polära koord.

$$\text{Area}(\Sigma) = \iint_\Sigma dS = \iint_{x^2+y^2\le 1} \sqrt{1+4(x^2+y^2)}\, dxdy =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1+4r^2}\, r\, dr\, d\theta = 2\pi\left[\frac{1}{12}(1+4r^2)^{3/2}\right]_{r=0}^1$$

$$= \underline{\underline{\frac{\pi}{6}(5^{3/2}-1) \text{ a.e.}}}$$

16. Beräkna arean av den del av konen $z = \sqrt{x^2+y^2}$ som ligger innanför den ovala cylindern $5x^2 + 4z^2 = 36$.

6. Skärningskurvan mellan konen och cylindern fås av

$$5x^2 + 4(\sqrt{x^2+y^2})^2 = 36 \Leftrightarrow 9x^2 + 4y^2 = 36 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$, d.v.s. projektionen av skärningskurvan i xy-planet är en ellips.

Den sökta ytan består av alla punkter på konen vars projektion ligger innanför ellipsen. Konens ytelement ges av

$$dS = \sqrt{1+|\nabla f|^2}\, dxdy \quad \text{där } f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow$$

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2x \\ \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2y \end{bmatrix} \Rightarrow |\nabla f|^2 = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 = 1$$

Den sökta arean fås av

$$\iint_{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 1} \sqrt{1+|\nabla f|^2}\, dxdy = \sqrt{2}\iint_{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 1} dxdy = \sqrt{2}\,\pi \cdot 2 \cdot 3 = \underline{\underline{6\sqrt{2}\pi}}$$

17. Beräkna arean av parameterytan (en torus) som definieras av

$$\mathbf{r}(s,t) = (2+\cos t)\cos s\,\mathbf{i} + (2+\cos t)\sin s\,\mathbf{j} + \sin t\,\mathbf{k}, \quad (0 \le s, t \le 2\pi).$$

17.

$$\text{Area} = \int_{t=0}^{2\pi}\int_{s=0}^{2\pi} \left\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right\| ds\, dt = 8\pi^2 \text{ a.e.}$$

(130829:6)

6. $\bar{r}(s,t) = (\cos s(2+\cos t), \sin s(2+\cos t), \sin t)$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial s} = \begin{pmatrix} -\sin s(2+\cos t) \\ \cos s(2+\cos t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} = \begin{pmatrix} -\cos s \sin t \\ -\sin s \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

Area vektorelement

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -\sin s(2+\cos t) & \cos s(2+\cos t) & 0 \\ -\cos s \sin t & -\sin s \sin t & \cos t \end{vmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos s \cos t\,(2+\cos t) \\ \sin s \cos t\,(2+\cos t) \\ \sin t\,(2+\cos t) \end{pmatrix}$$

Arean ges av

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\frac{\partial \bar{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}\right| ds\, dt = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} (2+\cos t)\, ds\, dt$$

$$= 2\cdot(2\pi)^2 = 8\pi^2 \text{ a.e.}$$

Flödesintegraler.

18. Bestäm flödet av vektorfältet

$$\mathbf{F}(x,y,z) = 2x\,\mathbf{i} + 3y\,\mathbf{j} - z\,\mathbf{k}$$

genom ytan Y om

a) Y är sfären $x^2+y^2+z^2 = 1$, orienterad så att enhetsnormalen $\hat{\mathbf{N}}$ pekar bort från origo.
b) Y är den del av cylindern $x^2+y^2 = 1$ som ligger mellan planet $z = x+1$ och planet $z = 0$, orienterad så att $\hat{\mathbf{N}}$ pekar bort från z-axeln.

18. a) Gauss sats ger

$$\iint_{x^2+y^2+z^2=1} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\, dS = \iiint_{x^2+y^2+z^2\le 1} \nabla\cdot\mathbf{F}\, dV = \frac{16\pi}{3}.$$

b) En direkt beräkning med en parametrisering av Y ger

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\, dS = 5\pi.$$

(180529:6)

Lösning följer på nästa sida.

den 4 maj 2021 11:35

6| $\bar{F}(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2x \\ 3y \\ -z \end{bmatrix}$

Divergensen av $\bar{F}$:

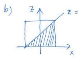
$$\nabla\cdot\bar{F} = \frac{\partial}{\partial x}(2x) + \frac{\partial}{\partial y}(3y) + \frac{\partial}{\partial z}(-z) = 2+3-1 = \underline{\underline{4}}$$

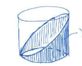
a) Eftersom sfären är sluten kan vi använda Gauss sats direkt

$$\iint_Y \bar{F}\cdot\hat{N}\, dS = \iiint \nabla\cdot\bar{F}\, dV = 4\,\text{Volym}(K) = 4\cdot\frac{4\pi\cdot 1^3}{3} = \underline{\underline{\frac{16\pi}{3}}}$$

$K: x^2+y^2+z^2 \le 1$

b)





$$Y: \begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ 0 \le z \le x+1 \end{cases}$$

Y är inte sluten så vi parametriserar Y med cylindriska koordinater och testar en direkt beräkning av flödet.

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \Rightarrow Y: \begin{cases} r = 1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le z \le \cos\theta + 1 \end{cases} \Rightarrow \bar{r}(\theta,z) = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ z \end{bmatrix}$$

$$\hat{N}\, dS = \pm\left(\frac{\partial\bar{r}}{\partial\theta} \times \frac{\partial\bar{r}}{\partial z}\right) d\theta\, dz = \pm\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} d\theta\, dz$$

Eftersom $\hat{N}$ pekar bort från z-axeln väljer vi $\oplus$.

$$\iint_Y \bar{F}\cdot\hat{N}\, dS = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{\cos\theta+1} \begin{bmatrix} 2\cos\theta \\ 3\sin\theta \\ -z \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} dz\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\cos\theta+1} \underbrace{2\cos^2\theta + 3\sin^2\theta}_{2+\sin^2\theta}\, dz\, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[2z + z\sin^2\theta\right]_{z=0}^{\cos\theta+1} d\theta$$

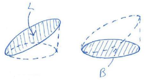
$$= \int_0^{2\pi} 2(\cos\theta+1) + (\cos\theta+1)\sin^2\theta\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\cos\theta\, d\theta + 2\cdot 2\pi + \int_0^{2\pi}\cos\theta\sin^2\theta\, d\theta + \int_0^{2\pi}\underbrace{\sin^2\theta}_{\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)}\, d\theta$$

$$= 2\cdot 0 + 4\pi + \left[\sin^3\theta\right]_{\theta=0}^{2\pi} + \frac{1}{2}\cdot 2\pi$$

$$= \underline{\underline{5\pi}}$$

Kommentar: Man kan även använda Gauss sats, men då måste Y slutas till först



$$U: \begin{cases} x^2+y^2 \le 1 \\ 0 \le z \le x+1 \end{cases}$$

$\partial U = Y \cup L \cup B$

$$\underbrace{\iiint_U \nabla\cdot\bar{F}\, dV}_{4\pi} = \iint_{\partial U} \bar{F}\cdot\hat{N}\, dS = \iint_Y \bar{F}\cdot\hat{N}\, dS + \underbrace{\iint_L \bar{F}\cdot\hat{N}\, dS}_{-\pi} + \underbrace{\iint_B \bar{F}\cdot\hat{N}\, dS}_{0}$$

19. Låt Y beteckna den parametriserade ytan i $\mathbb{R}^3$ som definieras av

$$Y: \mathbf{r}(s,t) = e^s\cos t\,\mathbf{i} + e^s\sin t\,\mathbf{j} + s\,\mathbf{k} \quad (0 \le s \le 1, 0 \le t \le 2\pi).$$

Y antas vara orienterad så att enhetsnormalen $\hat{\mathbf{N}}$ pekar bort från z-axeln.

a) Visa att en godtycklig punkt (x,y,z) på Y uppfyller ekvationen $x^2+y^2 = e^{2z}$ och bestäm enhetsnormalen $\hat{\mathbf{N}}$.
b) Beräkna flödesintegralen

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\, dS$$

av vektorfältet

$$\mathbf{F}(x,y,z) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}.$$

19. a)

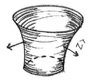
$$\hat{\mathbf{N}} = \frac{1}{\sqrt{1+e^{2s}}}\begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ -e^s \end{bmatrix} \quad \text{eller} \quad \hat{\mathbf{N}} = \frac{1}{\sqrt{1+e^{2z}}}\begin{bmatrix} xe^{-z} \\ ye^{-z} \\ -e^z \end{bmatrix}.$$

b) $-\frac{\pi(e^2+1)}{2}$

(190601:6)

6| Parameteryta

$$Y: \begin{cases} x = e^s\cos t \\ y = e^s\sin t \\ z = s \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0 \le s \le 1 \\ 0 \le t \le 2\pi \end{pmatrix}$$



a) $VL = x^2+y^2 = e^{2z} = HL$

$$VL = (e^s\cos t)^2 + (e^s\sin t)^2 = e^{2s}(\cos^2 t + \sin^2 t)$$

$$= e^{2s}\cdot 1 = e^{2z} = HL \quad \text{v.s.v.}$$

Det finns två sätt att bestämma en normal $\bar{N}$ till Y.

Metod 1:

$$\frac{\partial\bar{r}}{\partial s} \times \frac{\partial\bar{r}}{\partial t} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ e^s\cos t & e^s\sin t & 1 \\ -e^s\sin t & e^s\cos t & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -e^s\cos t \\ -e^s\sin t \\ e^{2s} \end{bmatrix} = e^s\begin{bmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ e^s \end{bmatrix}$$

$$\bar{N} = (\underline{+})\frac{\partial\bar{r}}{\partial s} \times \frac{\partial\bar{r}}{\partial t} = e^s\begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ -e^s \end{bmatrix} \quad \text{(pekar bort från } z\text{-axeln)}$$

$$\hat{N} = \frac{\bar{N}}{\|\bar{N}\|} = \frac{1}{\sqrt{1+e^{2s}}}\begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ -e^s \end{bmatrix}$$

Metod 2:

Ytans ekv. är $F(x,y,z) = x^2+y^2-e^{2z} = 0 \Rightarrow$

$$\nabla F(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ -2e^{2z} \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{N} = \underset{(-)}{+}\begin{bmatrix} x \\ y \\ -e^{2z} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\hat{N} = \frac{\bar{N}}{\|\bar{N}\|} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+e^{4z}}}\begin{bmatrix} x \\ y \\ -e^{2z} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{1+e^{2z}}}\begin{bmatrix} xe^{-z} \\ ye^{-z} \\ -e^{z} \end{bmatrix}}}$$

b) $\bar{F}(x,y,z) = \begin{bmatrix} -y \\ x \\ z \end{bmatrix}$

Eftersom Y är en parameteryta testar vi en direkt beräkning.

Orienterat ytelement:

$$\hat{N}\, dS = -\frac{\partial\bar{r}}{\partial s} \times \frac{\partial\bar{r}}{\partial t}\, ds\, dt = e^s\begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ -e^s \end{bmatrix} ds\, dt$$

Flödesintegral:

$$\iint_Y \bar{F}\cdot\hat{N}\, dS = \int_{s=0}^{1}\int_{t=0}^{2\pi} \begin{bmatrix} -y \\ x \\ z \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ -e^s \end{bmatrix} e^s\, dt\, ds$$

$$= \int_0^1\int_0^{2\pi} \underbrace{\begin{bmatrix} -e^s\sin t \\ e^s\cos t \\ s \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ -e^s \end{bmatrix}}_{-e^s\sin t\cos t + e^s\cos t\sin t - se^s = -se^s} e^s\, dt\, ds$$

$$= \int_0^1\int_0^{2\pi} -se^s\cdot e^s\, dt\, ds = -2\pi\int_0^1 se^{2s}\, ds =$$

partiell integration

$$= -2\pi\left(\left[\frac{1}{2}se^{2s}\right]_{s=0}^1 - \int_0^1 1\cdot\frac{1}{2}e^{2s}\, ds\right)$$

$$= -2\pi\left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2s}\right]_{s=0}^1\right) = -2\pi\left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}(e^2-1)\right)$$

$$= -2\pi\left(\frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}\right) = \underline{\underline{-\frac{\pi}{2}(e^2+1)}}$$

Kommentar:
Man kan även använda Gauss sats, men Y är inte sluten

$L: x^2+y^2 \le e^2,\ z = 1$
$B: x^2+y^2 \le 1,\ z = 0$
L och B sluter till Y

20. Låt

$$\mathbf{F}(x,y,z) = yz\,\mathbf{i} - xz\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}.$$

Bestäm flödet av vektorfältet $\mathbf{F}$ genom ytan

$$Y: x^2+y^2+z^2 = 1, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad z \ge 0$$

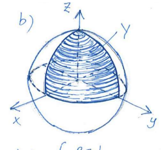
orienterad så att normalen pekar bort från origo.

20. En direkt beräkning med sfäriska koordinater ger

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\, dS = \frac{1}{8}.$$

(180112:6b)

b)



Åttondelssfären Y är inte sluten. Vi prövar därför en direkt beräkning av flödet. På sfären är det lämpligt att använda sfäriska koordinater.

$$Y: \begin{cases} \rho = 1 \\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{(sfäriska koord.)}$$

$$\hat{N} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{(enhetsnormal, pekar bort från O)}$$

$$dS = \sin\phi\, d\phi\, d\theta \quad \text{(ytelement)}$$

$$\bar{F}\cdot\hat{N} = \begin{bmatrix} yz \\ -xz \\ xy \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = yz\cdot x - xz\cdot y + xy\cdot z = \underline{\underline{xyz}}$$

Således

$$\iint_Y \bar{F}\cdot\hat{N}\, dS = \iint_Y xyz\, dS = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin\phi\cdot\sin\theta\sin\phi\cdot\cos\phi\cdot\sin\phi\, d\phi\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos\theta\sin\theta}_{\frac{1}{2}\sin 2\theta}\, d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\phi\cos\phi\, d\phi = \left[-\frac{1}{4}\cos 2\theta\right]_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{4}\sin^4\phi\right]_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{16}(-\cos\pi + \cos 0)\left(\sin^4\frac{\pi}{2} - \sin^4 0\right) = \underline{\underline{\frac{1}{8}}}$$

21. Låt Σ beteckna ytan $x^2+y^2=1+z^2, 0\le z\le 1$. Beräkna

$$\iint_\Sigma \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS$$

om $\mathbf{F}(x,y,z)=x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}$ och Σ är orienterad så att $\hat{\mathbf{N}}$ pekar bort från z-axeln.

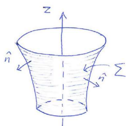
21. En direkt beräkning med en parametrisering av Σ ger

$$\iint_\Sigma \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS=2\pi.$$

(150116:6)

6|

$$\Sigma:\begin{cases}x^2+y^2=1+z^2\\0\le z\le 1\end{cases}$$



$\Updownarrow$

$$\Sigma:\begin{cases}r^2=1+z^2\\0\le\theta\le 2\pi\quad\text{(cyl. koord.)}\\0\le z\le 1\end{cases}$$

Metod 1 (Direkt beräkning):

Σ parametriseras av $\bar r(\theta,z)=\begin{bmatrix}\sqrt{1+z^2}\cos\theta\\\sqrt{1+z^2}\sin\theta\\z\end{bmatrix}$

$$\frac{\partial\bar r}{\partial\theta}=\begin{bmatrix}-\sqrt{1+z^2}\sin\theta\\\sqrt{1+z^2}\cos\theta\\0\end{bmatrix},\quad \frac{\partial\bar r}{\partial z}=\begin{bmatrix}\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\cos\theta\\\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\sin\theta\\1\end{bmatrix}$$

$$\hat n\,dS=\pm\frac{\partial\bar r}{\partial\theta}\times\frac{\partial\bar r}{\partial z}\,d\theta\,dz=\pm\begin{bmatrix}\sqrt{1+z^2}\cos\theta\\\sqrt{1+z^2}\sin\theta\\-z\end{bmatrix}d\theta\,dz$$

$\hat n$ pekar bort fr z-axeln $\Leftrightarrow$ $\hat n$ har negativ z-komponent $\Longrightarrow$

$$\hat n\,dS=\begin{bmatrix}\sqrt{1+z^2}\cos\theta\\\sqrt{1+z^2}\sin\theta\\-z\end{bmatrix}d\theta\,dz$$

$$\bar F(x,y,z)=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\Rightarrow \bar F(\bar r(\theta,z))=\begin{bmatrix}\sqrt{1+z^2}\cos\theta\\\sqrt{1+z^2}\sin\theta\\z\end{bmatrix}$$

Således

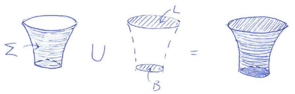
$$\iint_\Sigma \bar F\cdot\hat n\,dS=\int_0^1\int_0^{2\pi}\begin{bmatrix}\sqrt{1+z^2}\cos\theta\\\sqrt{1+z^2}\sin\theta\\z\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\sqrt{1+z^2}\cos\theta\\\sqrt{1+z^2}\sin\theta\\-z\end{bmatrix}d\theta\,dz$$

$$=\int_0^1\int_0^{2\pi}(1+z^2)(\cos^2\theta+\sin^2\theta)-z^2\,d\theta\,dz$$

$$=\int_0^1\int_0^{2\pi}1\,d\theta\,dz=1\cdot 2\pi=\underline{\underline{2\pi}}$$

Metod 2 (Gauss sats):

Σ är inte sluten, men slutes genom att lägga till två cirkelskivor B och L.



Låt U vara området

$$U:\begin{cases}0\le z\le 1\\x^2+y^2\le 1+z^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le z\le 1\\0\le\theta\le 2\pi\\0\le r\le\sqrt{1+z^2}\end{cases}\ \begin{pmatrix}\text{cyl.}\\\text{koord.}\end{pmatrix}$$

Då gäller $\partial U=\Sigma\cup B\cup L$. Gauss sats ger

$$\oiint_{\partial U}\bar F\cdot\hat n\,dS=\iiint_U\nabla\cdot\bar F\,dV.$$

Dessutom gäller

$$\oiint_{\partial U}\bar F\cdot\hat n\,dS=\iint_\Sigma\bar F\cdot\hat n\,dS+\iint_B\bar F\cdot\hat n\,dS+\iint_L\bar F\cdot\hat n\,dS$$

$$\iiint_U\nabla\cdot\bar F\,dV=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{\sqrt{1+z^2}}3\,r\,dr\,dz\,d\theta=3\cdot 2\pi\int_0^1\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{\sqrt{1+z^2}}dz$$

$$=3\pi\int_0^1 1+z^2\,dz=3\pi\left[z+\frac{z^3}{3}\right]_{z=0}^1=4\pi$$

$$\iint_B\bar F\cdot\hat n\,dS=\iint_{x^2+y^2\le 1}\begin{bmatrix}x\\y\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix}dx\,dy=0$$

$$\iint_L\bar F\cdot\hat n\,dS=\iint_{x^2+y^2\le 2}\begin{bmatrix}x\\y\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}dx\,dy=\iint_{x^2+y^2\le 2}1\,dx\,dy=\pi\cdot(\sqrt2)^2=2\pi$$

$$\iint_\Sigma\bar F\cdot\hat n\,dS=4\pi-0-2\pi=\underline{\underline{2\pi}}$$

Gauss sats.

22. Låt

$$\mathbf{F}(x,y,z)=z\,\mathbf{i}+y^3\,\mathbf{j}+x^2\,\mathbf{k}.$$

Bestäm flödet av $\mathbf{F}$ ut genom randytan till kuben

$$K:\begin{cases}-1\le x\le 1\\-1\le y\le 1\\-1\le z\le 1.\end{cases}$$

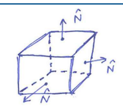
22. Gauss sats ger

$$\iint_{\partial K}\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS=\iiint_K\nabla\cdot\mathbf{F}\,dV=8.$$

Vi antar att $\hat{\mathbf{N}}$ pekar bort från K.

(161220:6b)

6)



∂K är orienterad så att $\hat N$ pekar bort från K. (ut ur)

Gauss sats ger

$$\iint_{\partial K}\bar F\cdot d\bar S=\iiint_K\nabla\cdot\bar F\,dV=\iiint_K\frac{\partial}{\partial x}(z)+\frac{\partial}{\partial y}(y^3)+\frac{\partial}{\partial z}(x^2)\,dV$$

$$=\iiint_K 3y^2\,dV=\int_{-1}^1\int_{-1}^1\int_{-1}^1 3y^2\,dy\,dz\,dx$$

$$=2\cdot 2\cdot\left[y^3\right]_{y=-1}^1=2\cdot 2\cdot(1-(-1))$$

$$=\underline{\underline{8}}$$

23. Beräkna flödet av vektorfältet

$$\mathbf{F}(x,y,z)=z(x^2+y^2)\,\mathbf{k}$$

genom sfären $x^2+y^2+z^2=a^2$, orienterad så att $\hat{\mathbf{N}}$ pekar bort från origo.

23. Gauss sats ger

$$\iint_{\partial K}\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS=\iiint_K\nabla\cdot\mathbf{F}\,dV=\iiint_K(x^2+y^2)\,dV=\frac{8\pi a^5}{15}$$

(191024:4b)

24. Låt $\mathbf{F}$ beteckna vektorfältet

$$\mathbf{F}(x,y,z)=\cos(xy)\,\mathbf{i}+yz\,\mathbf{j}+yz\sin(xy)\,\mathbf{k}.$$

a) Beräkna divergensen $\nabla\cdot\mathbf{F}$.
b) Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ ut ur tetraedern

$$T:\begin{cases}x\ge 0,\quad y\ge 0,\quad z\ge 0\\x+y+z\le 1.\end{cases}$$

Ytorna som omsluter tetraedern antas alltså vara orienterade så att enhetsnormalen $\hat{\mathbf{N}}$ pekar från området.

24. a) $\nabla\cdot\mathbf{F}=z$
b) Gauss sats ger

$$\iint_{\partial T}\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS=\iiint_T\nabla\cdot\mathbf{F}\,dV=\frac{1}{24}.$$

(190118:6)

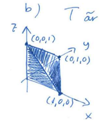
Fortsättning nästa sida

6| $\bar F(x,y,z)=\begin{bmatrix}\cos(xy)\\yz\\yz\sin(xy)\end{bmatrix}$

a) $\nabla\cdot\bar F=\frac{\partial}{\partial x}(\cos(xy))+\frac{\partial}{\partial y}(yz)+\frac{\partial}{\partial z}(yz\sin(xy))$

$=-y\sin(xy)+z+y\sin(xy)=\underline{\underline{z}}$

b) T är ett område i $\mathbb{R}^3$ vars rand ∂T består av 4 st triangulära plana ytor.



$$T:\begin{cases}0\le x\le 1\\0\le y\le 1-x\\0\le z\le 1-x-y\end{cases}$$

Gauss sats ger flödet genom alla 4 sidor av ∂T:

$$\iint_{\partial T}\bar F\cdot\hat N\,dS=\iiint_T\nabla\cdot\bar F\,dV=\iiint_T z\,dV$$

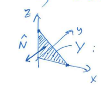
$$=\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y}z\,dz\,dy\,dx=\int_0^1\int_0^{1-x}\left[\tfrac12 z^2\right]_{z=0}^{1-x-y}dy\,dx$$

$$=\frac12\int_0^1\int_0^{1-x}(1-x-y)^2\,dy\,dx=\frac12\int_0^1\left[-\tfrac13(1-x-y)^3\right]_{y=0}^{1-x}dx$$

$$=\frac16\int_0^1(1-x)^3\,dx=\frac16\left[-\tfrac14(1-x)^4\right]_{x=0}^1=\frac16\cdot\frac14$$

$$=\underline{\underline{\frac{1}{24}}}$$

c) Den del av ∂T som ligger i planet $y=0$



$$Y:\begin{cases}y=0\\x,z\ge 0\\x+z\le 1\end{cases}\quad \hat N=-\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\ \text{(pekar bort från T)}\quad dS=dx\,dz$$

Flödet av $\bar F$ genom Y fås av

$$\iint_Y\bar F\cdot\hat N\,dS=\iint_Y\begin{bmatrix}\cos(xy)\\yz\\yz\sin(xy)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix}dx\,dz$$

$$=\int_{x=0}^1\int_{z=0}^{1-x}-yz\,dz\,dx=\underline{0}$$

$\uparrow y=0$

Flödet blir alltså noll genom väggen $y=0$.

25. Låt

$$\mathbf{F}(x,y,z)=y\,\mathbf{i}-x\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}.$$

Bestäm flödet av $\mathbf{F}$ genom ytan

$$Y:x^2+y^2+z^2=4,\quad z\ge 1$$

om Y är orienterad så att normalen pekar bort från origo.

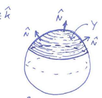
25. Använd Gauss sats, men ytan är inte sluten så den måste slutas till på lämpligt sätt först.

$$\iint_Y\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS=\frac{14\pi}{3}.$$

(170113:5)

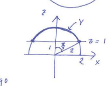
5| $\bar F(x,y,z)=y\,\hat\imath-x\,\hat\jmath+z\,\hat k$

$Y:\ x^2+y^2+z^2=4,\ z\ge 1$



Metod 1: Vi parametriserar Y med sfäriska koordinater

$$\begin{cases}x=2\sin\phi\cos\theta\\y=2\sin\phi\sin\theta\\z=2\cos\phi\end{cases}\quad 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\phi\le\frac{\pi}{3},$$



$\hat N=(\pm)\frac12\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$. Pekar bort från origo

$dS=2^2\sin\phi\,d\phi\,d\theta$

$$\bar F\cdot\hat N=\begin{bmatrix}y\\-x\\z\end{bmatrix}\cdot\frac12\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\frac12(yx-xy+z^2)=\frac12 z^2$$

Således

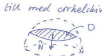
$$\iint_Y\bar F\cdot\hat N\,dS=\iint_Y\tfrac12 z^2\,dS=\frac12\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}(2\cos\phi)^2\cdot 4\sin\phi\,d\phi\,d\theta$$

$$=8\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/3}\sin\phi\cos^2\phi\,d\phi=8\cdot 2\pi\left[-\tfrac13\cos^3\phi\right]_{\phi=0}^{\pi/3}$$

$$=\frac{16\pi}{3}\left(-\left(\tfrac12\right)^3+1^3\right)=\frac{16\pi}{3}\cdot\frac78=\underline{\underline{\frac{14\pi}{3}}}$$

Metod 2: Vi använder Gauss sats. Y är inte sluten, men kan slutas till med cirkelskivan

$$D:\begin{cases}z=1\\x^2+y^2\le 3\end{cases}$$



$\hat N=\begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix}$

Y och D blir då randytor till området

$$U:\begin{cases}x^2+y^2+z^2\le 4\\z\ge 1\end{cases},\quad \partial U=Y\cup D$$

Enligt Gauss sats gäller

$$\iiint_U\nabla\cdot\bar F\,dV=\iint_{\partial U}\bar F\cdot\hat N\,dS=\iint_Y\bar F\cdot\hat N\,dS+\iint_D\bar F\cdot\hat N\,dS$$

Eftersom $\nabla\cdot\bar F=\frac{\partial}{\partial x}(y)+\frac{\partial}{\partial y}(-x)+\frac{\partial}{\partial z}(z)=0+0+1=1$ får vi

$$\iiint_U\nabla\cdot\bar F\,dV=\iiint_U dV=\int_1^2\left(\iint_{x^2+y^2\le 4-z^2}dx\,dy\right)dz$$

$$=\int_1^2\pi(4-z^2)\,dz=\pi\left(4-\left[\tfrac{z^3}{3}\right]_{z=1}^2\right)$$

$$=\pi\left(4-\tfrac13(8-1)\right)=\pi\left(\tfrac{12-7}{3}\right)=\frac{5\pi}{3}$$

Dessutom blir

$$\iint_D\bar F\cdot\hat N\,dS=\iint_D\begin{bmatrix}y\\-x\\z\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix}dS=\iint_D(-z)\,dS=\iint_{x^2+y^2\le 3}(-1)\,dx\,dy$$

$$=-3\pi$$

Således

$$\iint_Y\bar F\cdot\hat N\,dS=\iiint_U\nabla\cdot\bar F\,dV-\iint_D\bar F\cdot\hat N\,dS=\frac{5\pi}{3}-(-3\pi)$$

$$=\frac{5\pi+9\pi}{3}=\underline{\underline{\frac{14\pi}{3}}}$$

26. Låt Y vara den yta som definieras av

$$Y:z=\sqrt{x^2+y^2},\quad 1\le z\le 2.$$

Beräkna flödet av vektorfältet

$$\mathbf{F}(x,y,z)=x^3\,\mathbf{i}+y^3\,\mathbf{j}+(x^2z+y^2z)\,\mathbf{k}$$

genom Y, om Y är orienterad så att enhetsnormalen $\hat{\mathbf{N}}$ har negativ z-komponent.

26. Använd Gauss sats, men ytan är inte sluten så den måste slutas till på lämpligt sätt först.

$$\iint_Y\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS=-\frac{31\pi}{10}.$$

(171019:6)

27. Låt K beteckna den koniska yta som definieras av

$$K:\sqrt{(x-z)^2+y^2}=z,\quad z\le 1$$

orienterad så att $\hat{\mathbf{N}}$ pekar bort från konens centrumaxel. Beräkna flödesintegralen

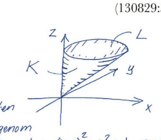
$$\iint_K(x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j})\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS.$$

27. $2\pi/3$

(130829:5)

5.

$\bar F=(x,y,0)$



K är inte sluten men tillslutes genom att lägga till ytan $L:\ (x-1)^2+y^2\le 1,\ z=1.$

Gauss' sats ger

$$\iiint_V\operatorname{div}\bar F\,dV=\iint_{K\cup L}\bar F\cdot d\bar S$$

$$\iiint_V\operatorname{div}\bar F\,dV=\int_0^1\left(\iint_{(x-z)^2+y^2\le z^2}2\,dx\,dy\right)dz$$

$$=\int_0^1 2\cdot\pi z^2\,dz=2\pi\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^1$$

$$=\frac{2\pi}{3}$$

$$\iint_L\bar F\cdot d\bar S=\iint_L(x,y,0)\cdot(0,0,1)\,dS=0$$

Således

$$\iint_K\bar F\cdot d\bar S=\frac{2\pi}{3}-0=\underline{\underline{\frac{2\pi}{3}}}$$

28. Låt Y vara randytan till området

$$U:\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1\\x\ge 0.\end{cases}$$

Y är orienterad så att $\hat{\mathbf{N}}$ pekar bort från U.

a) Beräkna flödet av

$$\mathbf{F}(x,y,z)=(x-z)\,\mathbf{i}-(yz+y)\,\mathbf{j}+z^2\,\mathbf{k}$$

genom Y.

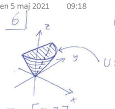
b) Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ genom den del av Y som ligger på konen $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

28. a) $\frac{\pi}{8}$
b) $-\frac{3\pi}{8}-\frac23$

(170529:6)

Fortsättning nästa sida

6



Beskrivning av U (halv kon)

$U: \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1 \\ x \ge 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ r \le z \le 1 \end{cases}$ (cyl. koord.)

$\bar{F} = \begin{bmatrix} x-z \\ -yz-y \\ z^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \nabla \cdot \bar{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = (1-0)+(-z-1)+2z = z$

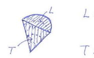
a) Y är randytan till U, d.v.s. $\partial U = Y$. Flödet av $\bar{F}$ genom U kan alltså beräknas med Gauss sats:

$$\iint_Y \bar{F} \cdot \hat{N}\, dS = \iiint_U \nabla \cdot \bar{F}\, dV = \iiint_U z\, dV = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_r^1 z\, r\, dz\, dr\, d\theta$$

$$= \pi \int_0^1 r \int_r^1 z\, dz\, dr = \pi \int_0^1 r \left[\tfrac{1}{2} z^2\right]_{z=r}^1 dr = \frac{\pi}{2} \int_0^1 r(1-r^2)\, dr$$

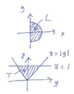
$$= \frac{\pi}{2}\left[\tfrac{1}{2}r^2 - \tfrac{1}{4}r^4\right]_{r=0}^1 = \frac{\pi}{2}\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}\right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{8}}}$$

b) För att få flödet genom den del av Y som ligger på konen subtraherar vi flödet genom de delar av Y som inte ligger på konen.



$L: \begin{cases} z = 1 \\ x^2+y^2 \le 1,\ x \ge 0 \end{cases}$

$T: \begin{cases} x = 0 \\ |y| \le z \le 1 \end{cases}$



Flödet genom L:

$\hat{N} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (pekar bort från U), $dS = dx\,dy$

$\bar{F} \cdot \hat{N} = \begin{bmatrix} x-z \\ -yz-y \\ z^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = z^2 \overset{z=1 \text{ på } L}{=} 1$

$\Rightarrow \iint_L \bar{F} \cdot \hat{N}\, dS = \iint_L 1\, dx\,dy = \text{Area}(L) = \frac{\pi \cdot 1^2}{2} = \underline{\underline{\pi/2}}$

Flödet genom T:

$\hat{N} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (pekar bort från U), $dS = dy\,dz$

$\bar{F} \cdot \hat{N} = \begin{bmatrix} x-z \\ -yz-y \\ z^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = z - x \overset{x=0 \text{ på } T}{=} z$

$$\Rightarrow \iint_T \bar{F} \cdot \hat{N}\, dS = \iint_T z\, dy\,dz = \int_{-1}^1 \int_{|y|}^1 z\, dz\, dy = 2\int_0^1 \int_y^1 z\, dz\, dy$$

$$= 2\int_0^1 \left[\tfrac{1}{2}z^2\right]_{z=y}^1 dy = \int_0^1 (1-y^2)\, dy = \left[y - \tfrac{1}{3}y^3\right]_{y=0}^1$$

$$= 1 - \tfrac{1}{3} - 0 = \underline{\underline{\tfrac{2}{3}}}$$

Svar: Flödet genom den del av Y som ligger på konen $z = \sqrt{x^2+y^2}$ blir alltså $\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} = \underline{\underline{-\frac{3\pi}{8} - \frac{2}{3}}}$

29. Låt ϕ vara en godtycklig skalär funktion och $\mathbf{F}$ ett godtyckligt vektorfält. Båda antas vara definierade på $\mathbb{R}^3$ och ha kontinuerliga partiella derivator av ordning ett.

a) Visa att

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{F}) = \nabla \phi \cdot \mathbf{F} + \phi(\nabla \cdot \mathbf{F}).$$

b) Antag att U är ett område i $\mathbb{R}^3$ med randyta ∂U som uppfyller villkoren för Gauss sats. Visa att

$$\iiint_U \phi(\nabla \cdot \mathbf{F})\, dV = \iint_{\partial U} \phi \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS - \iiint_U \nabla \phi \cdot \mathbf{F}\, dV.$$

6 a)

$$VL = \nabla \cdot (\phi \bar{F}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi F_1 \\ \phi F_2 \\ \phi F_3 \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial x}(\phi F_1) + \frac{\partial}{\partial y}(\phi F_2) + \frac{\partial}{\partial z}(\phi F_3)$$

$$= \frac{\partial \phi}{\partial x} F_1 + \phi \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} F_2 + \phi \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} F_3 + \phi \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

$$= \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial x} F_1 + \frac{\partial \phi}{\partial y} F_2 + \frac{\partial \phi}{\partial z} F_3}_{} + \phi \underbrace{\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right)}_{}$$

$$= \nabla \phi \cdot \bar{F} + \phi(\nabla \cdot \bar{F})$$

$= HL$ V.S.V.

b) Gauss sats applicerad på vektorfältet $\phi \bar{F}$ ger

$$\iint_{\partial D} \phi \bar{F} \cdot \hat{N}\, dS = \iiint_D \underbrace{\nabla \cdot (\phi \bar{F})}_{\nabla \phi \cdot \bar{F} + \phi(\nabla \cdot \bar{F}) \text{ (enligt a)}}\, dV$$

$$= \iiint_D \nabla \phi \cdot \bar{F}\, dV + \iiint_D \phi(\nabla \cdot \bar{F})\, dV$$

Omflyttning av termer ger

$$\iiint_D \phi(\nabla \cdot \bar{F})\, dV = \iint_{\partial D} \phi \bar{F} \cdot \hat{N}\, dS - \iiint_D \nabla \phi \cdot \bar{F}\, dV$$

V.S.V.

Stokes sats.

30. Under vissa villkor på fältet $\mathbf{F}$ och den orienterade ytan Y med randkurva C så säger Stokes sats att

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_Y (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS.$$

Verifiera Stokes sats då

$$\mathbf{F} = z\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} - x\,\mathbf{k} \quad \text{och} \quad Y: z = x^2 + y^2, \quad z \le 2x + 8,$$

d v s beräkna vänsterled och högerled var för sig och konstatera att de är lika.

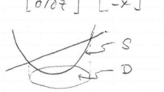
30.

$$\text{VL} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 9\pi, \quad \text{HL} = \iint_Y (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = 9\pi.$$

(120529:6)

6 $\quad \text{rot}\,\bar{F} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} z \\ x \\ -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

YTAN



SKÄRNINGSKURVA: $z = x^2+y^2 = 2x+8 \iff (x-1)^2+y^2 = 9,\ z = x^2+y^2$

YTAN: $\bar{r}(x,y) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ x^2+y^2 \end{bmatrix}$; $(x,y) \in D$ $\quad ((x-1)^2+y^2 \le 9)$

$\frac{\partial \bar{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{bmatrix}$

VI FÅR: $\iint_S \text{rot}\,\bar{F} \cdot d\bar{S} = \iint_D \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{bmatrix} dx\,dy =$

$= \iint_D (0-4y+1)\, dx\,dy \underset{\text{SYMMETRI}}{=} \iint_D 1\, dx\,dy \underset{\text{AREAN AV } D}{=} 9\pi$

OCH ÄVEN: $\oint_C \bar{F} \cdot d\bar{r} =$ [PARAM: $\bar{r}(\theta) = \begin{cases} 1+3\cos\theta \\ 3\sin\theta \\ (1+3\cos\theta)^2 + 9\sin^2\theta = 10+6\cos\theta \end{cases}$ $\theta: 0 \to 2\pi$

$\frac{d\bar{r}}{d\theta} = \begin{bmatrix} -3\sin\theta \\ 3\cos\theta \\ -6\sin\theta \end{bmatrix}$ (OBS: ORIENTERING: OK)]

$$= \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} 10+6\cos\theta \\ 1+3\cos\theta \\ -1-3\cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3\sin\theta \\ 3\cos\theta \\ -6\sin\theta \end{bmatrix} d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-30\sin\theta - 18\sin\theta\cos\theta + 3\cos\theta + 9\cos^2\theta + 6\sin\theta + 18\sin\theta\cos\theta)\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (\underbrace{-24\sin\theta}_{\to 0} + \underbrace{3\cos\theta}_{\to 0} + 9\cos^2\theta)\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{9}{2}(1 + \underbrace{\cos 2\theta}_{\to 0})\, d\theta = 2\pi \frac{9}{2} = 9\pi$$

31. Låt $\mathbf{F}$ beteckna vektorfältet

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (2z-3y)\,\mathbf{i} + (3x-z)\,\mathbf{j} + (y-2x)\,\mathbf{k}.$$

a) Beräkna $\nabla \times \mathbf{F}$ (rotationen av vektorfältet $\mathbf{F}$).

b) Beräkna kurvintegralen

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

där C betecknar skärningskurvan mellan planet $x+y+z=0$ och sfären $x^2+y^2+z^2=1$. Kurvan C antas vara moturs orienterad sett från punkten $(0,0,1)$.

31. a)

$$\nabla \times \mathbf{F} = 2\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} + 6\,\mathbf{k}$$

b) Med Stokes sats fås

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \frac{12\pi}{\sqrt{3}},$$

där $C = \partial D$.

(190321:6)

32. Låt C beteckna skärningskurvan mellan cylindern $x^2+y^2=1$ och ytan $z = x+y$.

a) Bestäm en parametrisering av kurvan C.

b) Antag att C genomlöps moturs sett från punkten $(0,0,2)$. Beräkna kurvintegralen

$$\oint_C -z\,dx + z\,dy + (x-y)\,dz.$$

32. a)

$$C: \mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \cos t + \sin t \end{bmatrix} \quad (0 \le t \le 2\pi).$$

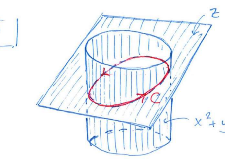
b) Med Stokes sats fås

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = 4\pi,$$

där $C = \partial D$.

(180830:5)

5



$C: \begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ z = x+y \end{cases}$

a) $x^2+y^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$

$z = x+y \Rightarrow z = \cos t + \sin t$. Alltså är

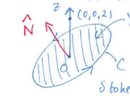
$\bar{r}(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \cos t + \sin t \end{bmatrix}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ en parametrisering av kurvan C.

b) Vektorfältet som ska integreras är

$\bar{F}(x,y,z) = \begin{bmatrix} -z \\ z \\ x-y \end{bmatrix} \Rightarrow \nabla \times \bar{F} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

Vi använder Stokes sats! (Går även att anv. param.)

C är randkurva till ytan Y: $\begin{cases} x^2+y^2 \le 1 \\ z = x+y \end{cases}$



Orienterat ytelement för Y:

$\hat{N}\, dS = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} dx\,dy$

$$\oint_C \bar{F} \cdot d\bar{r} \overset{\text{Stokes}}{=} \iint_Y (\nabla \times \bar{F}) \cdot \hat{N}\, dS = \iint_{x^2+y^2 \le 1} \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} dx\,dy$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \le 1} 4\, dx\,dy = 4 \cdot \pi \cdot 1^2 = \underline{4\pi}$$

33. Låt $\mathbf{F}$ vara vektorfältet

$$\mathbf{F}(x,y,z) = yz\,\mathbf{i} + 2xz\,\mathbf{j} + 3xy\,\mathbf{k}.$$

a) Beräkna rotationen av $\mathbf{F}$, d v s beräkna $\nabla \times \mathbf{F}$.

b) Låt L vara randkurvan till triangeln i planet $x+y+z=1$ vars hörn ligger i punkterna

$$A = (1,0,0), \quad B = (0,1,0), \quad C = (0,0,1)$$

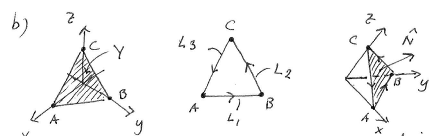
orienterad så att hörnen genomlöps i alfabetisk ordning: A, B, C. Beräkna kurvintegralen

$$\oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

6 $\quad \bar{F}(x,y,z) = \begin{bmatrix} yz \\ 2xz \\ 3xy \end{bmatrix}$

a) $\nabla \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & 2xz & 3xy \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 3x-2x \\ y-3y \\ 2z-z \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} x \\ -2y \\ z \end{bmatrix}}}$

b)



33. a)

$$\nabla \times \mathbf{F} = x\,\mathbf{i} - 2y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$

b) Stokes sats ger

$$\oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_T (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = 0,$$

där T är den triangel i planet $x+y+z=1$ som omsluts av L.

(170824:6)

L omsluter ytan Y som är en triangel i planet $x+y+z=1$. Enligt Stokes sats gäller

$$\oint_L \bar{F} \cdot d\bar{r} = \iint_Y (\nabla \times \bar{F}) \cdot \hat{N}\, dS$$

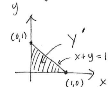
med Y orienterad enligt den tredje figuren.

På ytan Y gäller:

$z = 1-x-y \Rightarrow \hat{N}\, dS = \pm \begin{bmatrix} -\frac{\partial z}{\partial x} \\ -\frac{\partial z}{\partial y} \\ 1 \end{bmatrix} dx\,dy = \pm \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} dx\,dy$

P.g.a. orienteringen väljer vi $\hat{N}$ med positiv z-komponent.

Projektionen av Y i xy-planet är triangeln



$Y': \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1-x \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ 0 \le x \le 1-y \end{cases}$

Således

$$\iint_Y (\nabla \times \bar{F}) \cdot \hat{N}\, dS = \iint_{Y'} \begin{bmatrix} x \\ -2y \\ z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} dx\,dy$$

$$= \iint_{Y'} (x - 2y + \underset{z=1-x-y}{z})\, dx\,dy = \iint_{Y'} (1-3y)\, dx\,dy$$

$$= 1 \cdot \text{Area}(Y') - 3\iint_{Y'} y\, dx\,dy$$

$$= \frac{1}{2} - 3\int_0^1 \int_0^{1-y} y\, dx\,dy = \frac{1}{2} - 3\int_0^1 y(1-y)\, dy$$

$$= \frac{1}{2} - 3\left[\tfrac{1}{2}y^2 - \tfrac{1}{3}y^3\right]_{y=0}^1 = \frac{1}{2} - 3\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 1$$

$$= \underline{\underline{0}}$$

Man kan även parametrisera kurvan L:

$$\oint_L \bar{F} \cdot d\bar{r} = \int_{L_1} \bar{F} \cdot d\bar{r} + \int_{L_2} \bar{F} \cdot d\bar{r} + \int_{L_3} \bar{F} \cdot d\bar{r} \quad \text{(se andra figuren)}$$

För L_1 gäller

$L_1: \bar{r}(t) = (1-t)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-t \\ t \\ 0 \end{bmatrix}$ $(0 \le t \le 1)$

$$\int_{L_1} \bar{F} \cdot d\bar{r} = \int_{t=0}^1 \bar{F}(\bar{r}(t)) \cdot \frac{d\bar{r}}{dt}\, dt = \int_0^1 \begin{bmatrix} t \cdot 0 \\ 2(1-t) \cdot 0 \\ 3(1-t)t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} dt = 0$$

På liknande sätt fås $\int_{L_2} \bar{F} \cdot d\bar{r} = 0$ och $\int_{L_3} \bar{F} \cdot d\bar{r} = 0$

Svar: $\oint_L \bar{F} \cdot d\bar{r} = 0$.

34. Beräkna

$$\oint_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

om

$$\mathbf{F}(x,y,z) = xy\,\mathbf{i} + x^2\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k} \quad \text{och} \quad \Gamma\colon \begin{cases} (x-1)^2+y^2=1 \\ z+y=1 \end{cases}$$

är orienterad moturs sett från punkten $(1,0,2)$.

34. Stokes sats ger

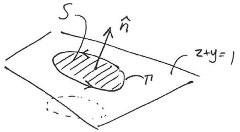
$$\oint_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS = \pi,$$

där $\partial S = \Gamma$.

(150317:6)

6)

$$\Gamma\colon \begin{cases} (x-1)^2+y^2=1 \\ z+y=1 \end{cases}$$



Kurvan Γ omsluter ytan S (ellipsskiva i planet $z+y=1$). Stokes sats ger

$$\oint_\Gamma \bar{F}\cdot d\bar{r} = \iint_S \nabla\times\bar{F}\cdot\hat{n}\,dS$$

$$\bar{F}(x,y,z) = \begin{bmatrix} xy \\ x^2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \nabla\times\bar{F}(x,y,z) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2x-x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{bmatrix}$$

Ytelement för planet $z+y=1$:

$$\hat{n}\,dS = \pm\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} dx\,dy$$

Punkten $(1,0,2)$ ligger ovanför planet. Γ moturs orienterad $\Rightarrow$ $\hat{n}$ har positiv z-komponent. Således

$$\hat{n}\,dS = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} dx\,dy \Rightarrow$$

$$\iint_S \nabla\times\bar{F}\cdot\hat{n}\,dS = \iint_{(x-1)^2+y^2\le 1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} dx\,dy = \iint_{(x-1)^2+y^2\le 1} x\,dx\,dy$$

$$\begin{bmatrix} u = x-1 \\ v = y \end{bmatrix} = \iint_{u^2+v^2\le 1} u+1\,du\,dv = \iint_{u^2+v^2\le 1} 1\,du\,dv = \pi\cdot 1^2 = \underline{\underline{\pi}}$$

---

35. a) Visa att

$$\nabla\times\mathbf{F} = \mathbf{0}$$

om $\mathbf{F}$ är ett konservativt vektorfält.

b) Visa att

$$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{F}) = 0$$

för ett godtyckligt vektorfält $\mathbf{F}$.

c) Visa att Greens sats kan härledas som ett specialfall av Stokes sats med plan yta.

35. Se lösningsförslag.

(170314:6)

6)

$$\nabla\times\bar{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ D_1 & D_2 & D_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = (D_2F_3 - D_3F_2)\hat{\imath} + (D_3F_1 - D_1F_3)\hat{\jmath} + (D_1F_2 - D_2F_1)\hat{k}$$

a) Om $\bar{F}$ är konservativt så finns det en skalärfunktion ϕ sådan att

$$\bar{F} = \nabla\phi \iff \begin{cases} F_1 = D_1\phi \\ F_2 = D_2\phi \\ F_3 = D_3\phi \end{cases}$$

Således får vi

$$\nabla\times\bar{F} = (D_2D_3\phi - D_3D_2\phi)\hat{\imath} + (D_3D_1\phi - D_1D_3\phi)\hat{\jmath} + (D_1D_2\phi - D_2D_1\phi)\hat{k}$$

$$= 0\,\hat{\imath} + 0\,\hat{\jmath} + 0\,\hat{k} = \bar{0}$$

eftersom partiella derivator kommuterar $(D_iD_j\phi = D_jD_i\phi)$

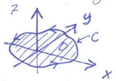
b) På liknande sätt fås

$$\nabla\cdot(\nabla\times\bar{F}) = D_1(D_2F_3 - D_3F_2) + D_2(D_3F_1 - D_1F_3) + D_3(D_1F_2 - D_2F_1)$$

$$= D_1D_2F_3 - D_1D_3F_2 + D_2D_3F_1 - D_2D_1F_3 + D_3D_1F_2 - D_3D_2F_1$$

$$= \underbrace{D_1D_2F_3 - D_2D_1F_3}_{0} + \underbrace{- D_1D_3F_2 + D_3D_1F_2}_{0} + \underbrace{D_2D_3F_1 - D_3D_2F_1}_{0} = \underline{0}$$

c) Antag att $\bar{F}(x,y,z) = P(x,y)\,\hat{\imath} + Q(x,y)\,\hat{\jmath} + 0\,\hat{k}$ och att ytan D med randkurva C ligger i planet $z=0$.



C moturs orienterad $\iff \hat{N} = \hat{k}$

$$\nabla\times F = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\hat{k}, \quad dS = dx\,dy$$

Stokes sats ger

$$\oint_C \bar{F}\cdot d\bar{r} = \iint_D \nabla\times\bar{F}\cdot\hat{N}\,dS \Rightarrow \oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Greens sats