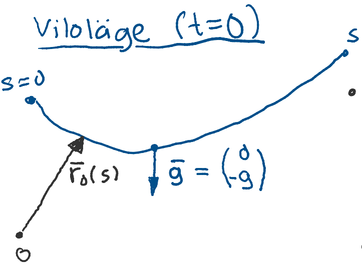
Viloläge ($t=0$)

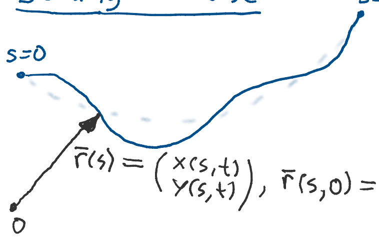


- $\bar r_0(s) = \begin{pmatrix} x_0(s) \\ y_0(s) \end{pmatrix}$

  där s = bågländen, dvs $\left\| \frac{d\bar r_0}{ds} \right\| = 1$, $0 \le s \le L$

- $\rho_0(s)$ [kg/m] vilodensitet

Sträng i rörelse



$\bar r(s) = \begin{pmatrix} x(s,t) \\ y(s,t) \end{pmatrix}$, $\bar r(s,0) = \bar r_0(s)$

$\rho(s,t)$ [kg/m] densitet

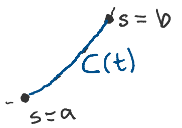
$\rho(s,0) = \rho_0(s)$

Naturlagar

1) Massan bevaras
2) Newtons andra lag: $\bar F = \frac{d\bar p}{dt}$, $\bar F$ = kraft, $\bar p$ = rörelsemängd $= m\bar v$
3) Eulers andra lag: $\frac{d\bar L}{dt} = \bar M$, $\bar L$ = rörelsemängdsmoment, $\bar M$ = kraftmoment
4) Hookes lag: spänningen är proportionell mot töjningen.

1) Massan bevaras

Betrakta en godtycklig liten del av strängen



$C(t)$: $\bar r(s)$ $a \le s \le b$ med båglängdselement

$$\boxed{dl = \left\| \frac{d\bar r}{ds} \right\| ds} \qquad (0)$$

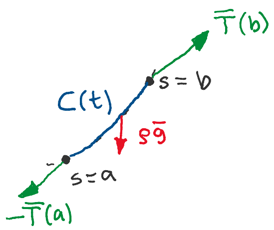
Total massa: $m = \int_{C(t)} \rho(s,t)\, dl$.

Massan bevaras:

$$0 = \frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{C(t)} \rho(s,t)\, dl \overset{(0)}{=} \frac{d}{dt} \int_{C(t)} \rho \left\| \frac{d\bar r}{ds} \right\| ds = \int_a^b \frac{d}{dt}\left(\rho \left\| \frac{d\bar r}{ds} \right\|\right) ds$$

a,b godtyckliga $\Rightarrow$ $\frac{d}{dt}\left(\rho \left\| \frac{d\bar r}{ds} \right\|\right) = 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{\rho(s,t) \left\| \frac{d\bar r}{ds} \right\| = \rho_0(s)}$ (1)

2) Newtons andra lag, $\bar F = \frac{d\bar p}{dt}$



Töjningskraft $\bar T(s)$

Summa krafter på $C(t)$: $\int_{C(t)} \rho \bar g\, dl + \bar T(b) - \bar T(a)$

Total rörelsemängd för $C(t)$: $\int_{C(t)} \rho \frac{d\bar r}{dt}\, dl$

Newtons andra lag: $\frac{d}{dt} \int_{C(t)} \rho \frac{d\bar r}{dt}\, dl = \int_{C(t)} \rho \bar g\, dl + \bar T(b) - \bar T(a)$

$\Downarrow (0)$

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \rho \frac{d\bar r}{dt} \left\| \frac{d\bar r}{ds} \right\| ds = \int_a^b \rho \bar g \left\| \frac{d\bar r}{ds} \right\| ds + \int_a^b \frac{\partial \bar T}{\partial s}\, ds$$

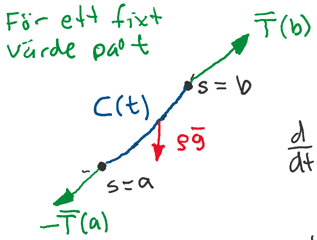
$\rho \left\| \frac{d\bar r}{ds} \right\| \overset{(1)}{=} \rho_0(s)$ $\qquad$ $\rho \left\| \frac{d\bar r}{ds} \right\| \overset{(1)}{=} \rho_0(s)$

$$\int_a^b \rho_0(s) \frac{\partial^2 \bar r}{\partial t^2}\, ds = \int_a^b \left(\rho_0(s)\bar g + \frac{\partial \bar T}{\partial s}\right) ds, \quad a,b \text{ godtyckliga}$$

$\Updownarrow$

$$\boxed{\rho_0(s) \frac{\partial^2 \bar r}{\partial t^2} = \rho_0(s)\bar g + \frac{\partial \bar T}{\partial s}} \qquad (2)$$

3) Eulers andra lag $\frac{\partial \bar L}{\partial t} = \bar M$ där $\bar L$ = rörelsemängdsmoment och $\bar M$ = kraftmoment



$$\frac{d\bar L}{dt} = \bar M$$

$$\frac{d}{dt}\int_{C(t)} \bar r \times \left(\rho \frac{d\bar r}{dt}\right) \underbrace{dl}_{\overset{(0)}{=}\|\frac{d\bar r}{ds}\| ds} = \int_{C(t)} \bar r\times(\rho \bar g)\underbrace{dl}_{\overset{(0)}{=}\|\frac{d\bar r}{ds}\|ds} + (\bar r\times\bar T)\Big|_{s=b} - (\bar r\times \bar T)\Big|_{s=a}$$

$$\Downarrow (1)$$

$$\int_a^b \rho_0 \frac{d}{dt}\left(\bar r\times \frac{d\bar r}{dt}\right) ds = \int_a^b \rho_0(\bar r\times\bar g) + \frac{\partial}{\partial s}(\bar r\times\bar T)\, ds \quad \text{för godtyckliga } a,b$$

$$\rho_0 \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\bar r\times\frac{d\bar r}{dt}\right)}_{= \underbrace{\frac{d\bar r}{dt}\times\frac{d\bar r}{dt}}_{=\bar 0} + \bar r\times\frac{d^2\bar r}{dt^2}} = \rho_0(\bar r\times \bar g) + \frac{\partial}{\partial s}(\bar r\times\bar T)$$

$$\cancel{\rho_0\, \bar r\times\frac{d^2\bar r}{dt^2}} = \rho_0(\bar r\times\bar g) + \frac{\partial\bar r}{\partial s}\times\bar T + \bar r\times\frac{\partial \bar T}{\partial s}$$

$$\overset{(2)}{=} \cancel{\rho_0\left(\bar r\times\frac{d^2\bar r}{dt^2}\right)}$$

$$\bar 0 = \frac{\partial\bar r}{\partial s}\times\bar T \qquad (*)$$

Beteckna strängens spännkraft σ och dess enhetstangent $\hat\tau = \frac{1}{\|\frac{\partial\bar r}{\partial s}\|}\frac{\partial\bar r}{\partial s}$. (3)

$(*) \Rightarrow \boxed{\bar T = \sigma\hat\tau}$

4. Hookes lag

Antag att strängens vilospänning (vid $t=0$) är σ_0 [N].

Hookes lag: $\sigma - \sigma_0 = E\varepsilon$ med E = elasticitetsmodul = Youngs modul (konstant)
ε = töjningen

$$\varepsilon = \frac{dl - ds}{ds} = \frac{dl}{ds} - 1 \overset{(0)}{=} \left\|\frac{\partial\bar r}{\partial s}\right\| - 1 \overset{(1)}{=} \frac{\rho_0}{\rho} - 1$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\sigma = \sigma_0 + E\left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1\right)}$$ med $\sigma_0 = \sigma_0(s)$, E konstant (4)

Strängens rörelseekvationer

$$\bar T \overset{(3)}{=} \sigma\hat\tau = \frac{\sigma}{\|\frac{\partial\bar r}{\partial s}\|}\frac{\partial\bar r}{\partial s} \overset{(4)}{=} \frac{\sigma_0 + E\left(\frac{\rho_0}{\rho}-1\right)}{\frac{\rho_0}{\rho}}\frac{\partial\bar r}{\partial s}$$ insättning i (2) ger röreslseekvationerna

$$\boxed{\begin{cases} \rho_0 \frac{\partial^2\bar r}{\partial t^2} = \rho_0\bar g + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\sigma_0 + E\left(\frac{\rho_0}{\rho}-1\right)}{\frac{\rho_0}{\rho}}\frac{\partial\bar r}{\partial s}\right) & \text{(5a) (x-led)} \\ & \text{(5b) (y-led)} \\ \rho\left\|\frac{\partial\bar r}{\partial s}\right\| \overset{(1)}{=} \rho_0 & \text{(5c)} \end{cases}}$$

M7018M F01a Exempel: Transversell rörelse, styv sträng, sid 3

den 30 juli 2020 11:46

Ex: Transversell rörelse och "styv" sträng

Antaganden:

1) $\bar{r}_0(s) = \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix}$, dvs $s = x$

2) strängen kan bara röra sig i y-led, dvs

$$\begin{cases} \bar{r}(x,t) = \begin{pmatrix} x \\ y(x,t) \end{pmatrix} \\ y(x,0) = 0 \end{cases}$$

3) "styv sträng", dvs $\rho \approx \rho_0$

(5a) $\Longrightarrow \quad 0 = \dfrac{\partial \sigma_0}{\partial x} \Longrightarrow \sigma_0$ konstant!

(5b) $\Longrightarrow \quad \rho_0 \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\rho_0 g + \sigma_0 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

(5c) $\Longrightarrow \quad \sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2} \approx 1 \Longrightarrow \dfrac{\partial y}{\partial x} \approx 0$

Det finns sju stycken grundenheter definierade utifrån sju stycken naturkonstanter

Storhet	Symbol	SI-enhet
Längd	L	[m]
Tid	T	[s]
Massa	M	[kg]
Temperatur	θ	[°C]
Elektrisk ström	J	[A]
Ljusstyrka		[cd]
Substansmängd		[mol]

Alla andra enheter kan konstrueras från grundenheterna

Storhet	Uttryck	Enhet
Kraft	LMT^{-2}	$N = kg \cdot m \cdot s^{-2}$
Energi	L^2MT^{-2}	$J = N \cdot m$
Effekt	L^2MT^{-3}	$W = J \cdot s^{-1}$
Volymdensitet	ML^{-3}	$\rho = kg \cdot m^{-3}$
Elektrisk spänning	$L^2MT^{-3}J^{-1}$	$V = W \cdot A^{-1}$
Elektrisk laddning	JT	$C = A \cdot s$

Dimensionslösa variabler, tex:

$$\frac{\overset{[m]}{x}}{\underset{[m]}{L}} = \hat{x} \quad \text{[dimensionslös]} \qquad \frac{\overset{[s]}{t}}{\underset{[s]}{T}} = \hat{t} \quad \text{[dimensionslös]}$$

$$\frac{\overset{[kg/m^3]}{\rho}}{\underset{[kg]\;\;[m]}{M/L^3}} = \hat{\rho} \quad \text{[dimensionslös]}$$

Buckinghams Pi-sats säger ungefär följande:
Varje fysikalisk lag

$$f(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0$$

för storheter q_i kan uttryckas på ekvivalent form

$$g(\hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots, \hat{p}_m) = 0$$

där alla $\hat{p}_i$ är dimensionslösa storheter och $m \le n$.

Mer om detta nästa föreläsning.