Lösning av en algebraisk ekvation $f(x,\varepsilon)=0$ genom att antaga att x kan skrivas som en potensserie av ε:

$$x(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n x_n = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots$$

Ex Bestäm en reell lösning till

$$f(x,\varepsilon) = x^3 + \varepsilon x - 1 = 0 \qquad (0<\varepsilon<1) \qquad (*)$$

$$\left((*) \Rightarrow f(0,\varepsilon) = -1, \quad f(1,\varepsilon)=\varepsilon, \quad \frac{\partial}{\partial x} f(x,\varepsilon) = 3x^2+\varepsilon > 0 . \right)$$

Vi söker en lösning på formen

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3 + \dots$$

$$0 = f(x,\varepsilon) = (x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3 + \dots)^3 - \varepsilon(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3 + \dots) - 1 \qquad (1)$$

$$= (x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3 + \dots)(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3 + \dots)(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3 + \dots)$$

$$= x_0^3 + \varepsilon 3x_0^2 x_1 + \varepsilon^2(3x_0^2 x_2 + 3x_0 x_1^2) + \varepsilon^3(3x_0^2 x_3 + 6x_0x_1x_2 + x_1^3) + O(\varepsilon^4) \qquad (\text{x fixt})$$

Vi sätter varje koefficient (till ε^k) i (1) lika med 0

ε^0: $x_0^3 - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x_0 = 1}$

ε^1: $3x_0^2 x_1 + x_0 = 0 \Rightarrow 3x_1 + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = -\frac{1}{3}}$

ε^2: $3x_0^2 x_2 + 3x_0 x_1^2 + x_1 = 0 \Rightarrow 3x_2 + \cancel{3}\frac{1}{\cancel{9}} - \cancel{\frac{1}{3}} = 0 \Rightarrow \boxed{x_2 = 0}$

ε^3: $3x_0^2 x_3 + 6x_0x_1x_2 + x_1^3 + x_2 = 0 \Rightarrow 3x_3 + 6\cdot 0 - \frac{1}{27} + x_2 = 0 \Rightarrow \boxed{x_3 = \frac{1}{3\cdot 27} = \frac{1}{81}}$

Alltså är $\boxed{x = \underbrace{1 - \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon^3}{81}}_{\stackrel{\text{def}}{=} a} + O(\varepsilon^4)}$

För $a = 1 - \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon^3}{81}$ och $f(x,\varepsilon) = x^3 + \varepsilon x - 1$ så får vi

$$f(a,\varepsilon) = \left(1 - \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon^3}{81}\right)^3 + \varepsilon\left(1 - \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon^3}{81}\right) - 1 =$$

$$= -\frac{\varepsilon^4}{81} + \frac{\varepsilon^5}{243} + \frac{\varepsilon^6}{2187} - \frac{\varepsilon^7}{6561} + \frac{\varepsilon^9}{531\,441}$$

$\varepsilon = 1$: $x = 0{,}6823$ $\quad a = 0{,}6790$

$\varepsilon = \frac{1}{2}$: $x = 0{,}8351$ $\quad a = 0{,}8349$

$\varepsilon = \frac{1}{4}$: $x = 0{,}9169$ $\quad a = 0{,}9169$

Vi kan på liknande sätt lösa differentialekvationer $f(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, \varepsilon) = 0$ genom att anta att $x(t)$ kan uttryckas som en potensserie

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n x_n(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots$$

Ex: BVP

$$\begin{cases} y' + y = \dfrac{1}{1+\varepsilon y} & (0 < \varepsilon < 1) \qquad (1) \\ y(0) = 0 & \qquad (2) \end{cases}$$

Vi söker en lösning på formen

$$y(x,\varepsilon) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \dots \qquad (3)$$

Notera att $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} (-\varepsilon y)^n = \frac{1 - \overbrace{(-\varepsilon y)^N}^{\to 0}}{1-(-\varepsilon y)} \longrightarrow \frac{1}{1+\varepsilon y}$ för $|\varepsilon y| < 1$ och $N \to \infty$. (4)

$(1),(3),(4) \Rightarrow \; y_0' + \varepsilon y_1' + \varepsilon^2 y_2' + O(\varepsilon^3) + y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + O(\varepsilon^3) = 1 - \varepsilon(y_0 + \varepsilon y_1 + O(\varepsilon^2)) + \varepsilon^2 (y_0 + O(\varepsilon))^2$

Sätt termer av samma potens lika

Integrerande Faktor (IF) e^x

ε^0: $y_0' + 1 y_0 = 1$ och $y_0(0) = 0 \Rightarrow$

$$e^x y_0' + e^x y_0 = e^x$$
$$\frac{d}{dx}(e^x y_0) = e^x$$
$$e^x y_0 = e^x + C$$
$$y_0(x) = 1 + Ce^{-x} \quad \text{och } 0 = y_0(0) = 1 + C \Rightarrow C = -1$$

Alltså: $\boxed{y_0(x) = 1 - e^{-x}}$ (5)

IF e^x

ε^1: $y_1' + 1 y_1 = -y_0$ och $y_1(0) = 0 \Rightarrow$

$$e^x y_1' + e^x y_1 = (e^{-x} - 1)e^x$$
$$\frac{d}{dx}(e^x y_1) = 1 - e^x$$
$$e^x y_1(x) = x - e^x + C$$
$$y_1(x) = xe^{-x} - 1 + Ce^{-x} \quad \text{och } 0 = y_1(0) = -1 + C \Rightarrow C = 1$$

Alltså: $\boxed{y_1(x) = (1+x)e^{-x} - 1}$ (6)

IF e^x

ε^2: $y_2' + 1 y_2 = -y_1 + y_0^2$ och $y_2(0) = 0 \Rightarrow$

$$e^x y_2' + e^x y_2 = e^x(-y_1 + y_0^2) = e^x(1 - (1+x)e^{-x} + 1 - 2e^{-x} + e^{-2x})$$
$$\frac{d}{dx}(e^x y_2) = e^x - 1 - x + e^x - 2 + e^{-x} = 2e^x - 3 - x + e^{-x}$$
$$e^x y_2(x) = 2e^x - 3x - \frac{x^2}{2} - e^{-x} + C$$
$$y_2(x) = 2 - 3xe^{-x} - \frac{x^2}{2}e^{-x} - e^{-2x} + Ce^{-x}$$

med

$$0 = y_2(0) = 2 - 0 - 1 + C = 1 + C \Rightarrow C = -1$$

$$\boxed{y_2(x) = 2 - \left(3x + \frac{x^2}{2} + 1\right)e^{-x} - e^{-2x}}$$

Alltså är $y(x,\varepsilon) = 1 - e^{x} + \varepsilon\left((1+x)e^{-x} - 1\right) + \varepsilon^2\left(2 - \left(3x + \frac{x^2}{2} + 1\right)e^{-x} - e^{-2x}\right) + O(\varepsilon^3)$

M7018M F03c Asymptotisk analys sid 3

den 4 augusti 2020 19:41

Definition

Antag att $f(x)$ och $g(x) \neq 0$ är definierade i en omgivning kring punkten $x=a$.

1) Vi säger att

$$f(x) = O(g(x)) \text{ då } x \to a \qquad (\text{"stora Ordo"})$$

om det finns ett $\delta > 0$ och $M > 0$ så att

$$0 < |x-a| < \delta \implies |f(x)| \leq M\, g(x) \qquad \implies \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq M$$

2) Vi säger att

$$f(x) = o(g(x)) \text{ då } x \to a \qquad (\text{"lilla ordo"})$$

om

$$\lim_{x \to a} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = 0$$

3) Vi säger att

$$f(x) \sim g(x) \text{ då } x \to a \qquad (\text{"asymptotiskt ekvivalent"})$$

om

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

4) Vi säger att

$$f(x) \ll g(x) \text{ då } x \to a \qquad (\text{"försumbar jämfört med"})$$

om

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

den 4 augusti 2020 21:32

Ex) a) $\sqrt{x^2+1} = O(x)$ då $x \to \infty$

ty för stora x är $\sqrt{x^2+1} = |x| \overbrace{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}^{\leq \sqrt{1+1} = \sqrt{2}} \leq \sqrt{2}\, x$

b) $\ln(e^{3x}+x^2) = O(x)$

ty för stora x är

$|\ln(e^{3x}+x^2)| \leq |\ln(e^{3x}+e^{3x})| = |\ln(\overbrace{2e^{3x}}^{\leq e^1 e^{3x} = e^{3x+1}})| \leq |\ln(e^{3x+1})| = |3x+1| \leq 4x$

c) $f(x)$ deriverbar i $x=a$

$\Updownarrow$

Det finns ett tal $\lambda = f'(a)$ sådant att

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lambda$$

$\Updownarrow$

$$\lim_{h\to 0} \left|\frac{f(a+h)-f(a)-\lambda h}{h}\right| = 0$$

$\Updownarrow$

$$f(a+h)-f(a)-\lambda h = o(h) \quad \text{då } h\to 0$$

$\Updownarrow$

$$f(a+h) = f(a)+\lambda h + o(h) \quad \text{då } h \to 0$$

d) Sätt $a=0$, $f(x)=\cos(x)$ och $\lambda = -\sin(0) = 0$ i c) så får vi

$$\cos(h) = \cos(0) + o(h)$$

$$\cos(h) - 1 = o(h)$$

e) $\lim_{x\to 0} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| = 1 \implies \sin(x) = O(x)$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \iff \sin(x) \sim x$ då $x \to 0$

f) $x^n \ll e^x$ då $x \to \infty$

eftersom $\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$

Definition: Asymptotiska expansioner

Vi säger att serien

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n(\varepsilon)\, x_n(t) \qquad (*)$$

är asymptotisk då $\varepsilon \to 0$ om

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{g_{n+1}(\varepsilon)}{g_n(\varepsilon)} = 0 \iff g_{n+1}(\varepsilon) = o(g_n(\varepsilon)) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Vi säger att serien $(*)$ är en asymptotisk expansion av $x(\varepsilon, t)$ om

$$x(\varepsilon, t) - \sum_{n=0}^{N} g_n(\varepsilon)\, x_n(t) = o(g_N(\varepsilon))$$

för varje t (punktvis eller likformigt).

Obs! En asymptotisk serie behöver inte vara konvergent för att vara värdefull.

Ex: Expansioner kan se ut på olika sätt

$$x = x_0 + \varepsilon^{\frac{1}{2}} x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^{3/2} x_3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{\frac{n}{2}} x_n(t)$$

$$x = \ln(\varepsilon)\, x_0 + \varepsilon \ln(\varepsilon)\, x_1 + \varepsilon\, x_2 + \varepsilon^2 \ln(\varepsilon) x_3 + \ldots$$