# F04a Poincaré-Lindstedts metod (Logan avsnitt 3.1.3) sid 1

den 4 augusti 2020 21:36

## ÖVERSIKT

För icke-linjära oscillatorer av typen

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0 x = \varepsilon f(t, x, \dot{x})} \qquad (*)$$

ger en reguljär störning

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots$$

ofta upphov till termer av typen

$$t\cos(\omega_0 t), \quad t\sin(\omega_0 t) \qquad \text{(sekulära termer).}$$

Om $t = o(\varepsilon^{-1})$ för $\varepsilon \to 0$ så blir amplituden obegränsad, vilket ger orimliga lösningar. Genom Poincaré-Lindstedts tidsskalning

$$s = \omega t = (\omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots)t$$

$$y(s) = x(t)$$

transformeras $(*)$ till

$$\boxed{\omega^2 \ddot{y} + \omega_0 y = \varepsilon f(t, y, \omega\dot{y})}$$

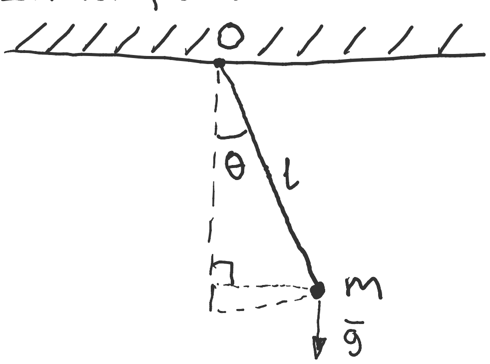
Denna ekvation behandlas med reguljär störning

$$\boxed{\begin{aligned} y &= y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots \\ \omega &= \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots \end{aligned}}$$

genom att "släcka ut" sekulära termer

**Ex Från F02b, sid 3:**

Enkel pendel




$$\begin{cases} l\ddot{\theta} + g\sin(\theta) = 0 & (1) \\ \theta(0) = \theta_0 & (2) \\ \dot{\theta}(0) = \omega_0 = 0 & (3) \end{cases}$$

För små vinklar är $\sin(\theta) \approx \theta$, vilket ger att

$$(1) \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \Rightarrow \theta(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \overset{(2),(3)}{\Longrightarrow} \theta(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t) \qquad (D)$$

för $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \sim T^{-1}$

Pendelns svängningstid (period) $P$ är

$$P = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \sim T$$

APPROXIMATIVT!

## Exakt period

$$(1) \implies l\dot\theta\ddot\theta + g\dot\theta\sin(\theta) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{l}{2}\dot\theta^2 - g\cos(\theta)\right) = 0$$

$$\frac{l}{2}\dot\theta^2 - g\cos(\theta) = C \overset{(2),(3)}{=} -g\cos(\theta_0)$$

$$\dot\theta^2 = \frac{2g}{l}\left(\cos(\theta) - \cos(\theta_0)\right)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \dot\theta = \pm\sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos(\theta)-\cos(\theta_0)}$$

$$\int_0^{P/4} dt = \overset{(+)}{-}\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{\theta_0}^{0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta)-\cos(\theta_0)}}$$

$$\boxed{P = 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta)-\cos(\theta_0)}}}$$ (elliptisk integral)

På föreläsning F02b sid 3 såg vi att för $\theta_0 = \varepsilon$ kan (1),(2),(3) skrivas på dimensionslös form

$$\begin{cases} \ddot\varphi + \varepsilon^{-1}\sin(\varepsilon\varphi) = 0 & (4)\\ \varphi(0) = 1 & (5)\\ \dot\varphi(0) = 0 & (6)\end{cases}$$

## Poincaré-Lindstedt skalning

$$\begin{cases}\tau = \omega t\\ x(\tau) = \varphi(t)\end{cases} \implies \ddot\varphi(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}(\varphi(t))\right) = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{d}{d\tau}(x(\tau))\cdot\frac{d\tau}{dt}\right)\cdot\frac{d\tau}{dt} = \omega^2\frac{d^2x}{d\tau^2} = \omega^2\ddot x(\tau)$$

$$(4) \iff \ddot\varphi + \varphi\underbrace{\frac{\sin(\varepsilon\varphi)}{\varphi\,\varepsilon}}_{\to 1 \text{ då } \varepsilon\to 0} = 0$$

Operturberade problemet har lösning med vinkelfrekvens 1 enligt (D)

(4), (5), (6) blir då

$$\begin{cases}\omega^2\ddot x(\tau) + \varepsilon^{-1}\sin(\varepsilon x(\tau)) = 0 & (7)\\ x(0) = 1 & (8)\\ \dot x(0) = 0 & (9)\end{cases}$$

Potensserieutveckling

$$\begin{cases} x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \cdots & (10)\\ \omega = 1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \cdots & (11)\end{cases}$$

Obs! $\omega_0 = 1$ = vinkelfrekvensen hos det operturberade systemet

$$\omega^2\ddot x = (1+\varepsilon\omega_1+\varepsilon^2\omega_2+\varepsilon^3\omega_3+\cdots)(1+\varepsilon\omega_1+\varepsilon^2\omega_2+\varepsilon^3\omega_3+\cdots)\ddot x =$$

$$= \left(1 + 2\varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2(2\omega_2+\omega_1^2) + \varepsilon^3(2\omega_3 + 2\omega_1\omega_2) + O(\varepsilon^4)\right)(\ddot x_0 + \varepsilon\ddot x_1 + \varepsilon^2\ddot x_2 + \varepsilon^3\ddot x_3 + \cdots) =$$

$$= \ddot x_0 + \varepsilon(\ddot x_1 + 2\omega_1\ddot x_0) + \varepsilon^2(\ddot x_2 + 2\omega_1\ddot x_1 + \ddot x_0(2\omega_2+\omega_1^2)) +$$

$$+ \varepsilon^3(\ddot x_3 + 2\omega_1\ddot x_2 + (2\omega_2+\omega_1^2)\ddot x_1 + \ddot x_0(2\omega_3 + 2\omega_1\omega_2)) + O(\varepsilon^4) \qquad (12)$$

$$\varepsilon^{-1}\sin(\varepsilon x) = \varepsilon^{-1}\left(\varepsilon x - \frac{(\varepsilon x)^3}{3!} + \frac{(\varepsilon x)^5}{5!} - \cdots\right) = x - \frac{\varepsilon^2}{6}x^3 + \frac{\varepsilon^4}{5!}x^5 - \cdots$$

$$= (x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3 + \cdots) - \frac{\varepsilon^2}{6}(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3 + \cdots)^3 +$$

$$= x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2\left(x_2 - \frac{x_0^3}{6}\right) + \varepsilon^3\left(x_3 - \frac{\cancel{3}^{\,1}}{\cancel{6}_{\,2}}x_0^2x_1\right) + O(\varepsilon^4) \qquad (13)$$

# F04a Poincaré-Lindstedts metod (Logan avsnitt 3.1.3) sid 3

den 5 augusti 2020 13:17

Sätt koefficienter lika i (7), (12), (13)

$\varepsilon^0$: $\begin{cases} \ddot{x}_0 + x_0 = 0 \\ x_0(0) = 1 \\ \dot{x}_0(0) = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow x_0 = A\cos(\tau) + B\sin(\tau)$, $\Rightarrow A = 1,\ B = 0 \Rightarrow \boxed{x_0(\tau) = \cos(\tau)}$

$\varepsilon^1$: $\begin{cases} \ddot{x}_1 + x_1 = -2\omega_1 \ddot{x}_0 = +2\omega_1\cos(\tau) \Rightarrow x = \overbrace{\omega_1 \underbrace{\tau \sin(\tau)}_{\text{sekulär!}}}^{\text{partikulär}} + \overbrace{A\cos(\tau) + B\sin(\tau)}^{\text{homogen}} \\ x_1(0) = \dot{x}_1(0) = 0 \Rightarrow A = B = 0 \Rightarrow \boxed{x_1(\tau) = 0} \end{cases}$

sekulär! $\Rightarrow$ sätt $\boxed{\omega_1 = 0}$

$\varepsilon^2$: $\begin{cases} \ddot{x}_2 + x_2 = -2\omega_1 \overbrace{\ddot{x}_1}^{=0} - \ddot{x}_0(2\omega_2 + \underbrace{\omega_1^2}_{=0}) + \dfrac{x_0^3}{6} = 2\omega_2\cos(\tau) + \dfrac{\cos^3(\tau)}{6} = 2\omega_2\cos(\tau) + \dfrac{\cos(3\tau) + 3\cos(\tau)}{24} \\ x_2(0) = \dot{x}_2(0) = 0 \qquad (14) \end{cases}$

Beta sid 127 formel 7

$\cos(\tau)$ ger sekulär term, så välj $\omega_2$ så att $2\omega_2 + \frac{3}{24} = 0$, dvs $\boxed{\omega_2 = -\frac{1}{16}}$

Alltså: $\ddot{x}_2 + x_2 = \frac{1}{24}\cos(3\tau)$, partikulärlösning $x_p = C\cos(3\tau) \Rightarrow -9C + C = \frac{1}{24} \Rightarrow C = -\frac{1}{8 \cdot 24} = -\frac{1}{192}$

$x_2(t) = -\frac{1}{192}\cos(3\tau) + A\cos(\tau) + B\sin(\tau)$

$(14) \Rightarrow \boxed{x_2(t) = \frac{1}{192}\left(\cos(\tau) - \cos(3\tau)\right)}$

$\left( \varepsilon^3: \begin{cases} \ddot{x}_3 + x_3 = -2\omega_1 \ddot{x}_2 - (2\omega_2 + \omega_1^2)\ddot{x}_1 - \ddot{x}_0(2\omega_3 + 2\omega_1\omega_2) + \frac{1}{2}x_0^2 x_1 \\ x_3(0) = \dot{x}_3(0) = 0 \end{cases} \right)$

Alltså:
$$\boxed{\begin{aligned} x(\tau) &= \cos(\tau) + \frac{\varepsilon^2}{192}\left(\cos(\tau) - \cos(3\tau)\right) + O(\varepsilon^3) \\ \omega &= 1 - \frac{\varepsilon^2}{16} + O(\varepsilon^3) \end{aligned}}$$

Vi hade ovan skalningen $\begin{cases} \tau = \omega t \\ x(\tau) = \varphi(t) \end{cases}$

Och på föreläsning F02 sid 3 (med $\hat{\theta}$ där $= \varphi$ här) hade vi fysikaliska variabeln $\theta = \underbrace{\theta_0}_{=\varepsilon}\varphi\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right)$, så för

$$\Omega = \sqrt{\frac{g}{l}}\,\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{16} + O(\varepsilon^3)\right)$$

har vi $\theta(t) = \varepsilon\cos(\Omega t) + \dfrac{\varepsilon^3}{192}\left(\cos(\Omega t) - \cos(3\Omega t)\right) + O(\varepsilon^4)$

**Svängningstid**

$$\boxed{\hat{P} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{1 - \frac{\varepsilon^2}{16} + O(\varepsilon^2)} = 2\pi\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{16} + O(\varepsilon^3)\right)}$$

Störningsmetod för linjära differentialekvationer av typerna

$$\varepsilon^2 y'' + q(x)\, y = 0 \qquad (0 < \varepsilon << 1) \qquad (1)$$

$$y'' + \lambda q(x)\, y = 0 \qquad \lambda >> 1 \qquad (2)$$

$$y'' + q(\varepsilon x)^2 y = 0 \qquad (0 < \varepsilon << 1) \qquad (3)$$

Kommentar: $q(x) > 0 \iff$ oscillerande region (Logan avsnitt 3.5.2)
$q(x) = 0 \iff$ "turning point"
$q(x) < 0 \iff$ exponentiellt avtagande/växande region (se Logan, avsnitt 3.5.1)

## Oscillerande region $(q(x) > 0)$

Sätt $q(x) = k(x)^2$ i (1)

$$\boxed{\varepsilon^2 y'' + k(x)^2 y = 0 \qquad (0 < \varepsilon << 1) \qquad (i)}$$

om $k(x) = \omega_0$ får vi lösningar av typen

$$y(x) = A e^{i\frac{\omega_0 x}{\varepsilon}} + B e^{-i\frac{\omega_0 x}{\varepsilon}} = C \cos\left(\frac{\omega_0 x}{\varepsilon}\right) + D \sin\left(\frac{\omega_0 x}{\varepsilon}\right)$$

Sätt därför

$$\boxed{y(x) = e^{i\frac{v(x)}{\varepsilon}}} \Rightarrow \begin{cases} y'(x) = \frac{i v'(x)}{\varepsilon} e^{i\frac{v(x)}{\varepsilon}} \\ y''(x) = \left(\frac{i v''(x)}{\varepsilon} - \frac{v'(x)^2}{\varepsilon^2}\right) e^{\frac{i v(x)}{\varepsilon}} \end{cases}$$

Insättning i (i) ger

$$\varepsilon^2 \left(\frac{i v''(x)}{\varepsilon} - \frac{v'(x)^2}{\varepsilon^2}\right) e^{i\frac{v(x)}{\varepsilon}} + k(x)^2 e^{i\frac{v(x)}{\varepsilon}} = 0$$

$$\varepsilon i v''(x) - v'(x)^2 + k(x)^2 = 0 \qquad \text{Sätt } u(x) = v'(x)!$$

$$\varepsilon i u'(x) - u(x)^2 + k(x)^2 = 0$$

Reguljär störning $u = u_0 + \varepsilon u_1 + O(\varepsilon^2)$ ger

$$\varepsilon^0: \quad -u_0^2 + k^2 = 0 \Rightarrow \boxed{u_0(x) = \pm k(x)}$$

$$\varepsilon^1: \quad i u_0' - 2 u_0 u_1 = 0 \Rightarrow \boxed{u_1(x) = \frac{i\, u_0'(x)}{2 u_0(x)} = \frac{i k'(x)}{2k(x)}}$$

$$v'(x) = u(x) = \pm k(x) + \frac{\varepsilon i}{2} \frac{k'(x)}{k(x)} + O(\varepsilon^2)$$

$$v(x) = \pm \int k(x)\, dx + \frac{\varepsilon i}{2} \underbrace{\int \frac{k'(x)}{k(x)} dx}_{\ln(k(x))} + C + O(\varepsilon^2) \qquad \text{För } D = e^{\frac{i}{\varepsilon}C}$$

$$e^x = 1 + x + O(x^2)$$
$$e^{O(\varepsilon)} = 1 + O(\varepsilon) + O(\varepsilon^2) = 1 + O(\varepsilon)$$

$$y(x) = e^{\frac{i}{\varepsilon} v(x)} = D\, e^{\pm\frac{i}{\varepsilon}\int k(x)\,dx - \frac{1}{2}\ln(k(x)) + O(\varepsilon)}$$

$$y(x) = D \frac{1}{\sqrt{k(x)}} e^{\pm\frac{i}{\varepsilon}\int k(x)\,dx} (1 + O(\varepsilon)) \quad \text{då } \varepsilon \to 0$$

$$A e^{if} + B e^{-if} = A(\cos(f) + i\sin(f)) + B(\cos(f) - i\sin(f)) = (A+B)\cos(f) + i(A-B)\sin(f)$$

**WBK-approximationen för lösning av (i)**

$$y(x) \sim \frac{1}{\sqrt{k(x)}} \left(C_1 \cos\left(\frac{1}{\varepsilon}\int k(x)\,dx\right) + C_2 \sin\left(\frac{1}{\varepsilon}\int k(x)\,dx\right)\right) \quad \text{då } \varepsilon \to 0, \quad k(x) = \sqrt{q(x)}$$

# F04b WKB-metoden, början (Logan avsnitt 3.5) sid 5

den 11 augusti 2020 13:29

## Egenvärdesproblem

Om det finns en lösning $y \neq 0$ till randvärdesproblemet (BVP)

$$\begin{cases} y'' + \lambda q(x) y = 0 \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

$(q(x) > 0$ viktfunktion$)$

så kallas $\lambda$ ett egenvärde till BVP.