Från föreläsning F04b: WBK-approximationen för lösning av

$$\varepsilon^2 y'' + k(x)^2 y = 0 \qquad (0 < \varepsilon \ll 1)$$

är

$$y(x) \sim \frac{1}{\sqrt{k(x)}}\left(C_1 \cos\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\int k(t)\,dt\right) + C_2 \sin\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\int k(t)\,dt\right)\right) \text{ då } \varepsilon \to 0,\ k(x) = \sqrt{q(x)} \qquad (*)$$

Ex: Bestäm approximativt egenvärde λ till

$$\begin{cases} y'' + \lambda q(x) y = 0, & q(0) \neq 0 \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

då $\lambda \gg 1$.

Lösning: För $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ ger $(*)$

$$y \sim \frac{1}{q(x)^{1/4}}\left(C_1 \cos\left(\sqrt{\lambda}\int_0^x \sqrt{q(t)}\,dt\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\lambda}\int_0^x \sqrt{q(t)}\,dt\right)\right)$$

med randvillkor

$$0 = y(0) = \frac{1}{q(0)^{1/4}} C_1 \Rightarrow C_1 = 0 \quad \text{och}$$

$$0 = y(\pi) = \frac{1}{q(\pi)^{1/4}} \underbrace{C_2}_{\neq 0 \text{ annars ingen egenfunktion}} \sin\left(\sqrt{\lambda}\int_0^\pi \sqrt{q(t)}\,dt\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{\lambda}\int_0^\pi \sqrt{q(t)}\,dt = \pi n, \qquad n \in \mathbb{N} \in \{0,1,2,\dots\}$$

$$\Downarrow$$

SVAR:

$$\begin{cases} \lambda_n \sim \left(\dfrac{\pi \cdot n}{\int_0^\pi \sqrt{q(t)}\,dt}\right)^2, & n \in \mathbb{N} \\ y_n \sim \dfrac{1}{q(x)^{1/4}} \sin\left(\dfrac{\pi n \int_0^x \sqrt{q(t)}\,dt}{\int_0^\pi \sqrt{q(t)}\,dt}\right) \end{cases} \quad \text{då } n \to \infty.$$

Ex: Bestäm approximativt egenvärde λ till

$$\begin{cases} y'' + \lambda e^{2x} y = 0 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

då $\lambda \gg 1$.

$$q(x)^2 = e^{2x}$$
$$\Downarrow$$
$$\int_0^x \sqrt{q(t)}\,dt = \int_0^x e^t\,dt = \left[e^t\right]_0^x = e^x - 1$$

Lösning:

$$y \sim \frac{1}{e^{x/2}}\left(C_1 \cos\left(\sqrt{\lambda}\int_0^x \sqrt{q(t)}\,dt\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\lambda}\int_0^x \sqrt{q(t)}\,dt\right)\right)$$

Randvillkor: $0 = y(0) \Rightarrow C_1 = 0$

$$0 = y(1) = \frac{1}{e^{1/2}} \underbrace{C_2}_{\neq 0} \sin\left(\sqrt{\lambda}\int_0^1 \sqrt{q(t)}\,dt\right) \Rightarrow \sqrt{\lambda}\int_0^1 \sqrt{q(t)}\,dt = n\pi,\ n \in \mathbb{N}$$

Alltså är

$$\begin{cases} \lambda_n \sim \left(\dfrac{n\pi}{e-1}\right)^2, & n \in \mathbb{N} \\ y_n \sim \dfrac{1}{e^{x/2}} \sin\left(\dfrac{\pi n (e^x - 1)}{e-1}\right) \end{cases} \quad \text{då } n \to \infty.$$

Inledande exempel

Betrakta integralen

$$I(x) = \int_x^\infty e^{-t^2}\,dt$$

Notera att

$$I(0) = \int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}\,dt \overset{\text{Matte 4}}{=} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Kommentar

$\frac{2}{\sqrt{\pi}} I(x) = \mathrm{erfc}(x) =$ Gauss komplementära felfunktion

1) Bestäm en asymptotisk expansion av $I(x)$ för "små" x, det vill säga då $x \to 0$.

$$I(x) = \int_x^\infty e^{-t^2}dt = \int_0^\infty e^{-t^2}dt - \int_0^x e^{-t^2}dt = \quad \text{(Taylorutveckling då } x \ll 1)$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^x \left(1 - t^2 + \frac{(-t^2)^2}{2!} + \frac{(-t^2)^3}{3!} + O(t^8)\right)dt$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5\cdot 2} + \frac{x^7}{7\cdot 6} + O(x^9)$$

2) Bestäm en asymptotisk expansion av $I(x)$ för "stora" x, det vill säga då $x \to \infty$.

Partiell integration:

$$I(x) = I_0(x) = \int_x^\infty -2te^{-t^2}\cdot\frac{1}{-2t}\,dt = \left[-e^{-t^2}\cdot\frac{1}{2t}\right]_x^\infty - \int_x^\infty e^{-t^2}\frac{1}{2t^2}\,dt = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{1}{2}\underbrace{\int_x^\infty e^{-t^2}t^{-2}dt}_{=I_1(x)}$$

På samma sätt fås

$$I_n(x) \overset{\text{def}}{=} \int_{-x}^\infty e^{-t^2}t^{-2n}\,dt = \frac{e^{-x^2}}{2x^{2n+1}} - \frac{2n+1}{2} I_{n+1}(x),$$ vilket ger att

$$I_0(x) = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-x^2}}{2x^3} - \frac{3}{2}\left(\frac{e^{-x^2}}{2x^5} - \frac{5}{2}(\cdots)\right)\right)$$

$$\boxed{I(x) = I_0(x) = e^{-x^2}\left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{4x^3} + \frac{3}{8x^5} + O(x^{-7})\right) \quad \text{då } x \to \infty}$$

Laplaces metod I (Avsnitt 3.6.3 i Logan)

Vi söker en asymptotisk expansion då $x \to \infty$ för integralen

$$I(x) = \int_a^b f(t)\, e^{x g(t)}\,dt \qquad (x \gg 1), \quad g \text{ deriverbar nära } t_0$$

där $g(t)$ har ett globalt maximum i en inre punkt $t = t_0$. För "tillräckligt stora" x avtar $e^{xg(t)}$ så snabbt med växande $|t - t_0|$ att $I(x)$ nästan bara beror av integrandens värden nära $t = t_0$. Taylorutveckling av $g(t)$ kring t_0 ger

$$g(t) = g(t_0) + \underbrace{\frac{g'(t_0)}{1!}}_{=0}(t-t_0) + \frac{g''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2 + O((t-t_0)^3)$$

$$e^{x O((t-t_0)^3)} = 1 + x\,O((t-t_0)^3) + O((t-t_0)^6)$$

och

$$I(x) \sim f(t_0)\int_a^b e^{xg(t_0) + x\frac{g''(t_0)}{2}(t-t_0)^2 + xO((t-t_0)^3)}\,dt = f(t_0)\,e^{xg(t_0)}\int_a^b e^{x\overbrace{\frac{g''(t_0)}{2}}^{:=-c}(t-t_0)^2}\underbrace{e^{xO((t-t_0)^3)}}_{\approx 1\ (*)}\,dt \sim$$

$$\sim f(t_0)\,e^{xg(t_0)}\underbrace{\int_a^b e^{-cx(t-t_0)^2}\,dt}_{G} \sim \sqrt{-\frac{2\pi}{xg''(t_0)}}\, f(t_0)\,e^{xg(t_0)} \quad \text{då } x \to \infty.$$

$$G = \left[\begin{array}{l} s = \sqrt{cx}\,(t - t_0) \\ ds = \sqrt{cx}\,dt \\ t = a \Rightarrow s = \sqrt{cx}\,(a - t_0) \\ t = b \Rightarrow s = \sqrt{cx}\,(b - t_0) \end{array}\right] = \frac{1}{\sqrt{cx}}\int_{\sqrt{cx}(a-t_0)}^{\sqrt{cx}(b-t_0)} e^{-s^2}\,ds \underset{\text{då } x\to\infty}{\overset{\sim}{\leq}} \frac{1}{\sqrt{cx}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}\,ds = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{cx}} = \sqrt{\frac{-2\pi}{xg''(t_0)}}$$

F05b Asymptotisk expansion av integraler (Logan avsnitt 3.6), sid 3

den 12 augusti 2020 13:08

Ex: Stirlings formel

$$\boxed{n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \text{då } n\to\infty.}$$

Bevis: Vi utnyttjar att $\Gamma(n+1)=n!$, där Γ är Eulers gammafunktion

$$\Gamma(x) \overset{def}{=} \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Gamma(x+1)=x\,\Gamma(x)}$$

Alltså är

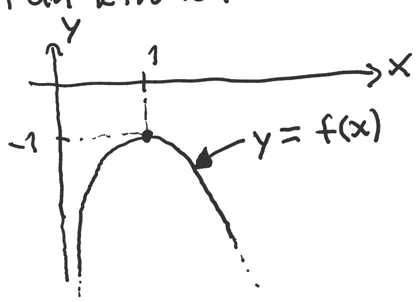
$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n e^{-t}\,dt = \begin{bmatrix} t=nx \\ dt = n\,dx\end{bmatrix} = \int_0^\infty (nx)^n e^{-nx}\, n\,dx = n^{n+1}\underbrace{\int_0^\infty x^n e^{-nx}\,dx}_{I} \qquad (4)$$

Här är

$$I = \int_0^\infty x^n e^{-nx}\,dx = \int_0^\infty e^{n(\ln(x)-x)}\,dx = \int_0^\infty e^{nf(x)}\,dx$$

Funktionen $f(x)$ har ett globalt maximum: $0=f'(x)=\frac{1}{x}-1 \Rightarrow x=1$

$f''(x) = -\frac{1}{x^2}<0$



Taylorutveckling av f kring 1:

$$f(x) = f(1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + O((x-1)^3)$$

$$= -1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + O((x-1)^3)$$

Alltså är

$$I = \int_0^\infty e^{nf(x)}\,dx = \underbrace{\int_0^{1-\varepsilon} e^{n\cdot f(x)}\,dx}_{I_1} + \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} e^{n\cdot f(x)}\,dx + \underbrace{\int_{1+\varepsilon}^\infty e^{nf(x)}\,dx}_{I_2} \qquad (5)$$

$$I_1 = \int_0^\infty 1\cdot e^{nf(x)}\,dx \overset{(*)}{\sim} \sqrt{-\frac{2\pi}{n\underbrace{f''(1)}_{=-1}}}\; e^{n\overbrace{f(1)}^{=-1}} \sim \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} \quad \text{då } n\to\infty$$

$$I_2 = \int_{1+\varepsilon}^\infty e^{nf(x)}\,dx = \int_{1+\varepsilon}^\infty e^{n\overbrace{(\ln(x)-x)}^{\le -\frac{x}{2}}}\,dx \le \int_1^\infty e^{-n\frac{x}{2}}\,dx = -\frac{2}{n}\left[e^{-\frac{n}{2}x}\right]_1^\infty = -\frac{2}{n}\left(0-e^{-\frac{n}{2}}\right) = \frac{2}{n}e^{-\frac{n}{2}}$$

då $n\to\infty$

Således är

$$I \sim \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} e^{nf(x)}\,dx = \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} e^{n(-1-\frac{1}{2}(x-1)^2+O((x-1)^3))}\,dx \sim e^{-n}\int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} e^{-\frac{n}{2}(x-1)^2}\cdot 1\,dx =$$

$$= \begin{bmatrix} s=\sqrt{\frac{n}{2}}(x-1)\\ ds=\sqrt{\frac{n}{2}}\,dx\end{bmatrix} = e^{-n}\sqrt{\frac{2}{n}}\int_{-\sqrt{\frac{n}{2}}\varepsilon}^{\sqrt{\frac{n}{2}}\varepsilon} e^{-s^2}\,ds \sim e^{-n}\sqrt{\frac{2}{n}}\int_{-\infty}^\infty e^{-s^2}\,ds = e^{-n}\sqrt{\frac{2}{n}}\sqrt{\pi} \quad \text{då } n\to\infty \qquad (6)$$

$$(4),(5),(6) \Longrightarrow \quad n! \sim \underbrace{n^{n+1}}_{=n\,n^n} e^{-n}\sqrt{\frac{2\pi}{n}} = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Laplace metod II (Logan Avsnitt 3.6.1)

Vi söker en asymptotisk expansion då $x \to \infty$ för integralen

$$I_1(x) = \int_a^b f(t)\, e^{-x g(t)}\, dt \qquad g(t) > 0,\ g \text{ strängt växande},\ g'(t) \text{ kontinuerlig}$$

Variabelbyte $s = g(t) - g(a)$, $ds = g'(t)\,dt$ ger

$$I_1(x) = \int_a^b \underbrace{\frac{f(t)}{g'(t)}}_{\overset{\text{def}}{=} \tilde{f}(s)} e^{-x(g(t)-g(a)+g(a))} g'(t)\,dt = \int_0^{g(b)-g(a) \overset{\text{def}}{=} c} \tilde{f}(s)\, e^{-x(s+g(a))}\, ds = e^{-x g(a)} \underbrace{\int_0^c \tilde{f}(s) e^{-xs}\, ds}_{\overset{\text{def}}{=} I_2(x)}$$

Det räcker alltså att göra en asymptotisk expansion av integralen $I_2(x)$, som för "tillräckligt stora x" bestäms av integrandens värden nära $s=0$, så vi kan Taylorutveckla $\tilde{f}(s)$ kring $s=0$ och kan då även ha nytta av

> **Watson's Lemma** (Theorem 3.18 i Logan)
>
> Betrakta integralen
> $$I(x) = \int_0^b t^\alpha f(t)\, e^{-\lambda t}\, dt$$
> där $\alpha > -1$ och $f(t)$ har Taylorutveckling med $f(0) \neq 0$ och $|f(t)| \leq Ce^{kt}$.
> Då följer att
> $$I(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)\, \Gamma(\alpha+n+1)}{n!\, x^{\alpha+n+1}} \qquad \text{då } x \to \infty$$

Ex Bestäm en asymptotisk utveckling av

$$I(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t}\, dt \qquad (x \gg 1).$$

Det vill säga, då $x \to \infty$.

Taylorutvecklingen

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n = 1 - t + t^2 - t^3 + O(t^4) \qquad (7)$$

konvergerar för $|t| < 1$.

$$I(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t}\, dt = \underbrace{\int_0^1 \frac{e^{-xt}}{1+t}\, dt}_{I_1(x)} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t}\, dt}_{I_2(x)} \qquad (8)$$

med

$$I_2(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t}\, dt \leq \frac{1}{2} \int_1^\infty e^{-xt}\, dt = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{x} e^{-xt}\right]_{t=1}^\infty = \frac{1}{2x} e^{-x} = O\left(\frac{e^{-x}}{x}\right) \ll O(x^{-(n+1)}) \qquad (9)$$

och

$$I_1(x) = \int_0^1 (1 - t + t^2 + O(t^3))\, e^{-xt}\, dt = \begin{bmatrix} s = xt \\ ds = x\,dt \end{bmatrix} = \frac{1}{x}\int_0^x \left(1 - \frac{s}{x} + \left(\frac{s}{x}\right)^2 + O\left(\left(\frac{s}{x}\right)^3\right)\right) e^{-s}\, ds \sim$$

$$\sim \frac{1}{x}\int_0^\infty \left(\overset{=s^0}{1} - \frac{s}{x} + \left(\frac{s}{x}\right)^2 + O\left(\left(\frac{s}{x}\right)^3\right)\right) e^{-s}\, ds = \frac{1}{x}\left(\underbrace{\Gamma(1)}_{=0!=1} - \frac{\overbrace{\Gamma(2)}^{=1!=1}}{x} + \frac{\overbrace{\Gamma(3)}^{=2!=2}}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \text{ då } x \to \infty \qquad (10)$$

$$(8), (9), (10) \Rightarrow \boxed{I(x) \sim \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{(n+1)!}{x^n} + O(x^{-(n+1)}) \text{ då } x \to \infty} \qquad (11)$$

F05c Asymptotisk expansion av integraler, sid 5

den 12 augusti 2020 17:07

Ex: Visa att

$$I(x) = \int_x^\infty \frac{dt}{t^2 \ln(t)} \sim \frac{1}{x\ln(x)} \text{ då } x \to \infty$$

Lösning:

Vi försöker skriva om integralen på formen $I(x) = \int_0^b f(s) e^{-xs} ds$ för att sedan fortsätta som på förra sidan.

$$I(x) = \int_x^\infty \frac{dt}{t^2 \ln(t)} = \begin{bmatrix} t = xs \\ dt = x ds \end{bmatrix} = \int_1^\infty \frac{x\,ds}{(xs)^2 \ln(xs)} = \frac{1}{x}\int_1^\infty \frac{ds}{s^2(\ln(s) + \ln(x))} = \begin{bmatrix} y = \ln(s) \\ dy = \frac{1}{s} ds \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{x}\int_0^\infty \frac{dy}{e^y(y + \ln(x))} = \begin{bmatrix} z = \frac{y}{\ln(x)} \\ dz = \frac{dy}{\ln(x)} \end{bmatrix} = \frac{1}{x}\int_0^\infty \frac{e^{-\ln(x) z}}{z\ln(x) + \ln(x)} \ln(x)\, dz = \frac{1}{x}\int_0^\infty \frac{e^{-(\ln(x))z}}{1+z} dz =$$

$$= \frac{1}{x} J(\ln(x)),$$

där

$$J(\xi) = \int_0^\infty \frac{e^{-\xi z}}{1+z} dz \overset{(11)}{=} \frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi^2} + \frac{2}{\xi^3} + O(\xi^{-4})$$

Alltså är

$$I(x) \sim \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{(\ln(x))^2} + \frac{2}{(\ln(x))^3} + O((\ln(x))^{-4}\right) \text{ då } x \to \infty.$$