F06 Normerade vektorrum, sid 1

den 12 augusti 2020 20:23

Låt V vara ett vektorrum över $\mathbb{C}$ eller $\mathbb{R}$. En norm på V associerar ett icke-negativt tal $\|x\|$ till varje $x \in V$ och ska uppfylla följande villkor

1) $\|x\| = 0 \iff x = 0$

2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\| \quad \forall x \in V, \ \forall \alpha \in \mathbb{C}$

3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in V$ (triangelolikheten)

Ex: Vektorrummet $\mathbb{R}^n$ kan normeras med den Euklidiska normen

$$\|x\| = \|x\|_2 = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}, \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

eller

$$\|x\|_p = \left(|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p \right)^{1/p} \qquad (\ell^p\text{-norm}, \ 1 \leq p < \infty)$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

Ex: Låt $C^k([a,b])$ beteckna alla funktioner definierade på $[a,b]$ sådana att

$$x, x', x'', \ldots, x^{(k)} \in C([a,b])$$

med norm

$$\|x\| = \sum_{n=0}^{k} \max_{a \leq t \leq b} |x^{(n)}(t)|, \qquad x^{(0)}(t) \overset{\text{def}}{=} x(t)$$

Ex: Om $x \in C([a,b])$ så kallas

$$\|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p \, dt \right)^{1/p} \qquad (1 \leq p < \infty)$$

för L^p-normen av x.

Ex: Låt $x(t) = A\sin(mt)$, $x \in C([0, 2\pi])$, $m \in \mathbb{Z}_+$ $\Rightarrow x'(t) = -Am\cos(mt)$

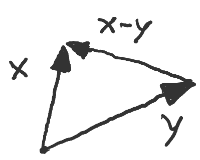
$$\|x\|_{C([a,b])} = \max_{0 \leq t \leq 2\pi} |A \sin(mt)| = |A|$$

$$\|x\|_{L^2([0,2\pi])} = \left(\int_0^{2\pi} A^2 \underbrace{\sin^2(mt)}_{= \frac{1-\cos(2mt)}{2} \text{ osv...}} \, dt \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} A^2 \big(\underbrace{\sin^2(mt) + \cos^2(mt)}_{=1} \big) \, dt \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{\cancel{2}} \cancel{2}\pi A^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}\,|A|$$

$$\|x\|_{C^1([0,2\pi])} = \max_{0 \leq t \leq 2\pi} |x(t)| + \max_{0 \leq t \leq 2\pi} |x'(t)| = |A| + |Am| = |A|(1+m)$$

Avstånd

Avståndet mellan $x, y \in V$ är $\|x - y\|$



Konvergens i norm

Vi säger att följden $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar mot x i V eller $x_n \to x$ då $n \to \infty$ om

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - x\| = 0$$

D v s om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $N > 0$ så att

$$n > N \Rightarrow \|x_n - x\| < \varepsilon$$

Cauchy följd

Följden $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ sägs vara en Cauchy följd om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett N så att

$$m, n > N \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

Banachrum

Ett normerat vektorrum V sägs vara komplett om varje Cauchyföljd i V konvergerar. Ett komplett normerat vektorrum kallas för ett Banachrum.

Sats Vektorrummet $C^k([a,b])$ är komplett

Bevis: se kursen Matematisk analys och geometri

Sats Vektorrummet $L^p([a,b])$ $(1 \leq p < \infty)$ är komplett.

Bevis: Se kurs i Funktionsanalys/Integrationsteori

Variationskalkyl

Definition En funktional J är en reell- eller komplexvärd funktion definierad på ett vektorrum V.

$$J: V \to \mathbb{R} \quad \text{eller} \quad J: V \to \mathbb{C}$$

Ex: En funktional på vektorrummet $C^1([0,1])$ är

$$J(x) = x(0)^2 - 2x'(1).$$

En funktional på $C([0,\pi])$ är

$$J(x) = \int_0^\pi \frac{x(t)}{1+t^2}\,dt.$$

I variationskalkylen studeras funktionaler av typen

$$J(x) = \int_a^b L(t, x(t), x'(t))\,dt, \qquad x \in C^2([a,b])$$

Definition En funktional $J: V \to \mathbb{R}$ sägs vara differentierbar i punkten x om det finns en linjär funktional δJ sådan att

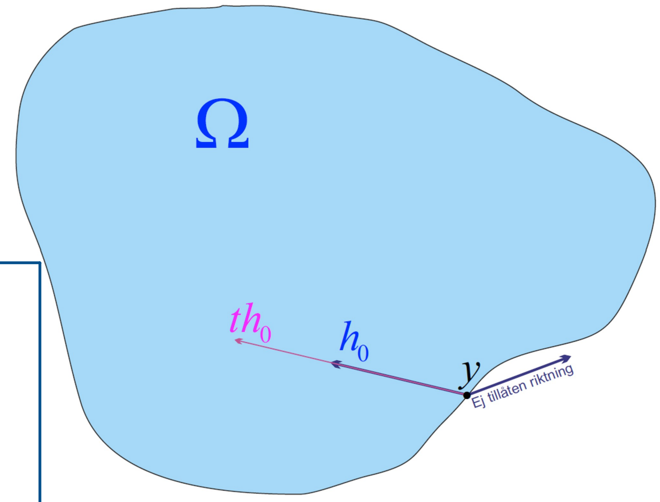
$$\forall h \in V: \ J(x+h) = J(x) + \delta J(h) + o(\|h\|) \quad \text{då } h \to 0.$$

Obs! δJ beror även av x, så man kan därför skriva $\delta J(x,h)$ eller $\delta_x J(h)$ och kalla $\delta_x J(h)$ för differentialen av J i punkten x. Funktionen h kallas för variationen av x.

Sats Om J är differentierbar i x så är differentialen $\delta_x J$ entydigt bestämd.

Definition (Tillåten riktning)

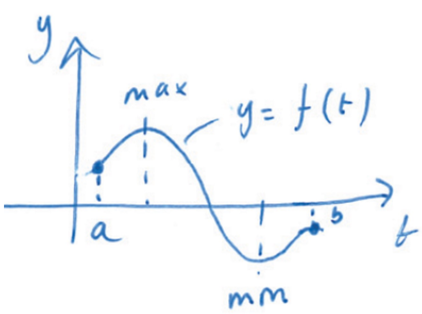
Låt J vara en funktional på ett linjärt rum $\mathcal{V}$. För en given delmängd $\Omega \subseteq \mathcal{V}$ och $y \in \Omega$ sägs h vara en **tillåten riktning** i y om $y + th \in \Omega$ då t är tillräckligt liten.

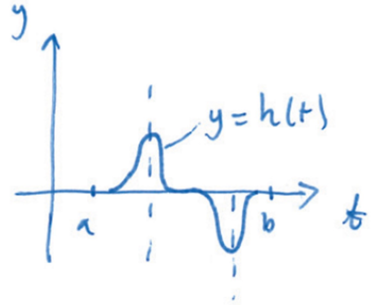


Lemma Låt $C_c^\infty([a,b])$ beteckna mängden funktioner i $C^\infty([a,b])$ med kompakt stöd i (a,b) (det vill säga nollskild på en sluten och begränsad delmängd av (a,b)).
För $f \in C([a,b])$ så gäller då att

$$\int_a^b f(t)\,h(t)\,dt = 0 \quad \forall h \in C_c^\infty([a,b]) \iff f(t) = 0 \quad \forall t \in [a,b]$$

"Bevis"





Euler-Lagranges ekvationer

Funktionen $x \in C^2([a,b])$ sägs vara en extremal till funktionalen

$$J(x) = \int_a^b L(t, x(t), x'(t))\,dt$$

om $\delta_x J(h) = 0$ för alla tillåtna variationer h.

Sats (Euler-Lagrange) För funktionalen $J(x) = \int_a^b L(t, x(t), x'(t))\,dt$ gäller att

$x \in C^1([a,b])$, $\|x\| = \left(\int_a^b (|x|^2 + |x'|^2)\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\delta_x J(h) = 0 \quad \forall h \in C_c^\infty([a,b]) \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial x'}\right) = 0$$

Bevis Vi beräknar först differentialen $\delta_x J$:

Linearisering av L kring $h=0$

$$J(x+h) - J(x) = \int_a^b \big(\underbrace{L(t, x+h, x'+h')}_{= L(t,x,x') + \frac{\partial L}{\partial x}(t,x,x')h + \frac{\partial L}{\partial x'}(t,x,x')h' + O(|h|^2 + |h'|^2)} - L(t, x, x')\big)\,dt \overset{\uparrow}{=} \underbrace{\int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial x} h + \frac{\partial L}{\partial x'} h'\right) dt}_{= \delta_x J(h)} + \int_a^b O(|h|^2 + |h'|^2)\,dt =$$

$$= \delta_x J(h) + o(\|h\|) \quad \text{med} \quad \delta_x J(h) = \int_a^b \frac{\partial L}{\partial x} h + \frac{\partial L}{\partial x'} h'\,dt. \qquad (*)$$

Partiell integration ger att

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial x'} h'\,dt = \underbrace{\left[\frac{\partial L}{\partial x'} h\right]_a^b}_{=0} - \int_a^b \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x'}\right) h\,dt.$$

Insättning i $(*)$ ger att

$$0 = \delta_x J(h) = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x'}\right) h\,dt \quad \forall h \in C_c^\infty([a,b]) \overset{\text{Lemma}}{\Longrightarrow} \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x'} = 0 \quad \text{V.S.V.}$$