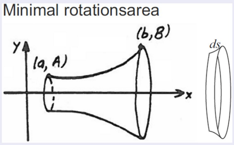
Exempel (Minimal rotationsyta)

Minimal rotationsarea



Rotationsytan skivas upp i band med area

$$dA = (2\pi y(\cancel{x}))\cdot ds$$

En kurva $y(x)$ från (a,A) till (b,B) roterar runt x-axeln. Välj denna kurva $y(x)$ så att rotationsytan blir minimal.

För $ds = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$ så vill vi alltså minimera

$$J(y) = 2\pi\int_a^b \overbrace{y(x)\sqrt{1+y'(x)^2}}^{=L(\cancel{x},y,y')}\,dx \quad \text{med} \quad y(a)=A,\ y(b)=B. \quad \text{skall minimeras}$$

$$J(y) \text{ minimal} \Rightarrow \delta J = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) = 0$$

$$0 = y'\frac{\partial L}{\partial y} \underbrace{- y'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) - \frac{\partial L}{\partial y'}y''}_{= -\frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial L}{\partial y'}\right)} + \frac{\partial L}{\partial y'}y'' = \frac{d}{dx}\Big(\underbrace{L - y'\frac{\partial L}{\partial y'}}_{=C=\text{konstant}}\Big)$$

$$C = L - y'\frac{\partial L}{\partial y'} = y\sqrt{1+(y')^2} - y'\frac{y\cdot\cancel{2}y'}{\cancel{2}\sqrt{1+(y')^2}} = \frac{y(1+(y')^2) - y(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}}$$

$$\Updownarrow$$

$$C\sqrt{1+(y')^2} = y$$

$$1+(y')^2 = \left(\frac{y}{C}\right)^2$$

$$(y')^2 = \left(\frac{y}{C}\right)^2 - 1$$

$$y' = \pm\sqrt{\left(\frac{y}{C}\right)^2 - 1}$$

$$\Updownarrow$$

$$y = C\cosh\left(\frac{x+D}{C}\right)$$

Alternativt:

$$\pm(x+C_2) = \int\frac{dy}{\sqrt{\frac{y^2}{C^2}-1}} = \left[\begin{array}{l}\frac{y}{C} = \cosh(t)\\ dy = C\sinh(t)\,dt\\ \frac{y^2}{C^2}-1 = \cosh^2(t)-1 = \sinh^2(t)\end{array}\right] = \int\frac{C\cancel{\sinh(t)}}{\cancel{\sinh(t)}}\,dt =$$

$$= Ct + C_3 = C\,\mathrm{arccosh}\left(\frac{y}{C}\right) + C_3$$

$$\mathrm{arccosh}\left(\frac{y}{C}\right) = \pm\frac{x+D}{C}$$

$$y(x) = C\cosh\left(\frac{x+D}{C}\right)$$

Betrakta det normerade vektorrummet $V = C^2([a,b])$. Funktionalen $J: V \to \mathbb{R}$ som definieras av

$$J(x) = \int_a^b L(t, x, \dot{x})\,dt, \quad x \in V$$

har en extremal i punkten $x \in V$ om

$$\delta_x J(h) = 0 \quad \forall h \in V,$$

där differentialen $\delta_x J$ definieras av

$$\delta_x J(h) = \int_a^b \frac{\partial L}{\partial x} h + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{h}\,dt$$
$$= \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right) h\,dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} h\right]_{t=a}^{b} \quad (*)$$

Om vi väljer h så att $h(a) = h(b) = 0$ så måste extremalen x måste uppfylla Euler-Lagranges ekvation

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \quad (E-L)$$

Obs! Extremalen x kan vara ett lokalt minimum, ett lokalt maximum eller en sadelpunkt till J. För att avgöra detta krävs noggrannare studie av J.

Ibland söker man extremalen i en delmängd $A \subset V$. A kan vara ett underrum eller konvex delmängd av V. Man måste då välja variationen h så att $x + h \in A$.

Fixerade begynnelsevillkor

$\begin{cases} x(a) = x_0 \\ x'(a) = v_0 \end{cases}$, d vs $A = \{x \in C^2([a,b]) : x(a) = x_0,\ x'(a) = v_0\}$ (konvex delmängd av V).

Då måste h uppfylla $\underbrace{\begin{cases} h(a) = 0 \\ h'(a) = 0 \end{cases}}_{\text{Räcker ej för att ge (E-L) i (*)}}$, så vi kan tex välja $\underbrace{h \in C_c^\infty([a,b])}_{\text{Bättre!}}$.

Fixerade randvillkor

$\begin{cases} x(a) = x_1 \\ x(b) = x_2 \end{cases}$, d vs $A = \{x \in C^2([a,b]) : x(a) = x_1,\ x(b) = x_2\}$ (konvex delmängd av V).

Då måste h uppfylla $\begin{cases} h(a) = 0 \\ h(b) = 0 \end{cases}$, så vi kan tex välja $h \in C_c^\infty([a,b])$.

Fria randvillkor

Om vi inte har några villkor på x, d vs $A = V$ så medför $\delta_x J = 0$ att

$$0 = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} h\right]_a^b = \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right|_{t=b} h(b) - \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right|_{t=a} h(a) \quad \forall h \in V$$

Alltså får vi de naturliga randvillkoren

$$\boxed{\begin{array}{ll} x(a) \text{ fri} \Rightarrow & \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right|_{t=a} = 0 \\ x(b) \text{ fri} \Rightarrow & \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right|_{t=b} = 0 \end{array}}$$

Generaliseringar

I) Om $x: [a,b] \to \mathbb{R}^N$ är en vektorfunktion $x = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$

så uppfyller extremalerna till

$$J(x) = \int_a^b L(t, x, x')\, dt \quad , \quad x \in C^2(\overbrace{[a,b]}^{\text{Definitionsmängd}}; \mathbb{R}^N)$$

N stycken ekvationer

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial x_i'}\right) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, \dots, N).$$

II) Om $u: \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ är en funktion av n variabler $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

så uppfyller extremalerna till

$$J(u) = \int_\Omega L(x, u, \nabla u)\, dx, \quad u \in C^2(\overline{\Omega}) \quad , \quad \nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

den partiella differentialekvationen

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial L}{\partial u_{x_i}}\right) = 0 \quad , \quad u_{x_i} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

Hamiltons princip

Ett mekaniskt system som beskrivs av generaliserade koordinater $q = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_N(t) \end{pmatrix}$

har kinetisk energi

$$T = T(q, q')$$

och potentiell energi

$$V = V(t, q)$$

Systemets Lagrangian definieras som $L = T - V = L(t, q, q')$.

Enligt Hamiltons princip så sker systemets rörelse under tiden $0 \leq t \leq T$ så att q är en extremal till verkansintegralen

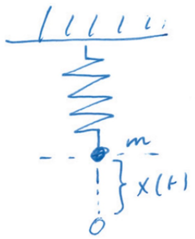
$$J(q) = \int_0^T L(t, q, q')\, dt, \qquad q \in C^2([0,T]; \mathbb{R}^N),$$

det vill säga, rörelseekvationerna för systemet ges av

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i'}\right) = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, N).}$$

Obs! Hamiltons princip $\Leftrightarrow \delta_q J = 0$ kallas även för principen om stationär verkan.

Ex: Icke-linjär fjäder (Duffings ekvation)



Kinetisk energi:

$$T = \frac{1}{2} m |\dot{x}|^2$$

Potentiell energi:

$$V = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{4} a x^4$$

Lagrangian:

$$L(x, x') = T - V = \frac{1}{2} m (x')^2 - \frac{1}{2} k x^2 - \frac{1}{4} a x^4$$

Verkansintegral

$$J(x) = \int_0^T L(x, x')\, dt$$

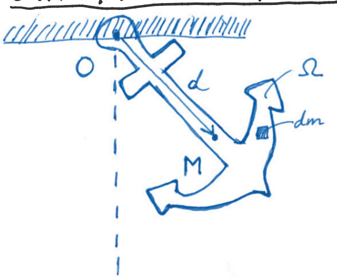
stationär verkan:

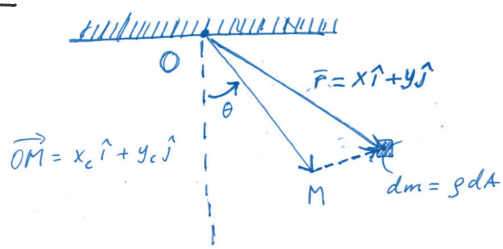
$$\delta_x J = 0 \Rightarrow 0 = \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial x'}\right) = -kx - ax^3 - \frac{d}{dt}(m x')$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{m x'' = -kx - ax^3}$$

Ex: Fysikalisk pendel





Rörelseenergi vid tiden t:

$$dT = \frac{1}{2} \rho\, dA \|\dot{\bar{r}}\|^2 = \frac{\rho}{2} \|\bar{r}\|^2 \dot{\theta}^2 dA$$

$$T = \int_\Omega \frac{\rho}{2} \|\bar{r}\|^2 \dot{\theta}^2 dA = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \underbrace{\int_\Omega \rho \|\bar{r}\|^2 dA}_{I \text{ (tröghetsmomentet runt } O)} = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$$

Potentiell energi vid tiden t:

$$dV = (\overbrace{\rho\, dA}^{dm}) g y = g \rho y\, dA$$

$$V = \int_\Omega g \rho y\, dA = g \int_\Omega \rho y\, dA = g M y_c = -g m d \cos\theta$$

Lagrangian:

$$L = T - V = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + g M d \cos(\theta)$$

Verkansintegral

$$J(\theta) = \int_0^T L(\theta, \dot{\theta})\, dt$$

$$\delta_\theta J = 0 \Rightarrow 0 = \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = -g M d \sin(\theta) - \frac{d}{dt}(I \dot{\theta})$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{I \ddot{\theta} + g M d \sin(\theta) = 0}$$