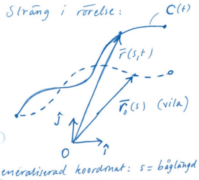
F08a Variationskalkyl (forts), sid 1

den 14 augusti 2020 12:33

Ex: Potentiell energi ϕ i en elastisk sträng av längd L_1

Sträng i rörelse:



Generaliserad koordinat: $s =$ båglängd

$$\begin{cases} \bar r(s,t) = x(s,t)\,\hat\imath + y(s,t)\,\hat\jmath \\ \bar r(s,0) = \bar r_0(s) = x_0(s)\,\hat\imath + y_0(s)\,\hat\jmath, \quad \left\|\frac{\partial \bar r_0}{\partial s}\right\| = 1 \end{cases}$$

Rörelsekvationer: $\Leftarrow$ F07

$$\begin{cases} \rho_0 \frac{\partial^2 \bar r}{\partial t^2} = \rho_0 \bar g + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\sigma}{\left\|\frac{\partial \bar r}{\partial s}\right\|}\frac{\partial \bar r}{\partial s}\right) & (1) \\ \frac{\rho_0}{\rho} = \left\|\frac{\partial \bar r}{\partial s}\right\| & (2) \end{cases}$$

Hookes lag:

$$\sigma = \sigma_0 + E\left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1\right) \quad (3)$$

Kinetisk energi:

Rörelseenergin i strängen vid tiden t är

$$T = \int_{C(t)} \frac{1}{2}\rho \left\|\frac{\partial \bar r}{\partial t}\right\|^2 dl = \int_{s=0}^{L_1} \frac{1}{2} \underbrace{\rho \left\|\frac{\partial \bar r}{\partial t}\right\|^2 \left\|\frac{\partial \bar r}{\partial s}\right\|}_{\overset{(2)}{=} \rho_0} ds$$

$$= \int_0^{L} \frac{1}{2}\rho_0 \left\|\frac{\partial \bar r}{\partial t}\right\|^2 ds$$

Kinetisk energi:

Rörelseenergin i strängen vid tiden t är

$$T = \int_{C(t)} \frac{1}{2}\rho \left\|\frac{\partial \bar r}{\partial t}\right\|^2 dl = \int_{s=0}^{L_1} \frac{1}{2}\rho \left\|\frac{\partial \bar r}{\partial t}\right\|^2 \left\|\frac{\partial \bar r}{\partial s}\right\| ds$$

$$= \int_0^{L_1} \frac{1}{2}\rho_0 \left\|\frac{\partial \bar r}{\partial t}\right\|^2 ds$$

Potentiell energi:

Den potentiella energin i strängen vid tiden t är

$$V = \int_{C(t)} \rho g y \, dl + \int_{s=0}^{L_1} \phi\left(s, \left\|\frac{\partial \bar r}{\partial s}\right\|\right) ds = \int_{s=0}^{L} \rho_0 g\, y(s,t) + \phi\left(s, \left\|\frac{\partial \bar r}{\partial s}\right\|\right) ds$$

där $\phi(s,z)$ är en obekant funktion som ska relateras till Hookes lag.

Låt $0 \le t \le T_1$

$$L = T - V = \int_0^{L_1} \overbrace{\left(\frac{1}{2}\rho_0 \left\|\frac{\partial \bar r}{\partial t}\right\|^2 - \rho_0 g y - \phi\left(s, \left\|\frac{\partial \bar r}{\partial s}\right\|\right)\right)}^{L\left(t,s,\bar r,\frac{\partial \bar r}{\partial t},\frac{\partial \bar r}{\partial s}\right)} ds$$

$$J(\bar r) = \int_0^{T_1}\int_0^{L_1} L\left(t, s, \bar r, \frac{\partial \bar r}{\partial t}, \frac{\partial \bar r}{\partial s}\right) ds\, dt$$

$$\delta J = 0 \implies \frac{\partial L}{\partial \bar r} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \bar r_t}\right) - \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial L}{\partial \bar r_s}\right) = 0, \text{ med}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar r} = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial x} \\ \frac{\partial L}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho_0 g \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar r_t} = \frac{1}{2}\rho_0 \frac{\partial}{\partial \bar r_t}\left(x_t^2 + y_t^2\right) = \frac{1}{2}\rho_0 \begin{pmatrix} 2x_t \\ 2y_t \end{pmatrix} = \rho_0 \frac{\partial \bar r}{\partial t}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar r_s} = -\frac{\partial}{\partial \bar r_s}\phi\Big(s, \underbrace{\left\|\frac{\partial \bar r}{\partial s}\right\|}_{z}\Big) = -\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_s}\phi\left(s, \sqrt{x_s^2 + y_s^2}\right) \\ \frac{\partial}{\partial y_s}\phi\left(s, \sqrt{x_s^2+y_s^2}\right) \end{pmatrix}} = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \cdot \frac{\frac{\partial \bar r}{\partial s}}{\left\|\frac{\partial \bar r}{\partial s}\right\|} \qquad (4)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \cdot \frac{\cancel{2} y_s}{\cancel{2}\sqrt{x_s^2+y_s^2}} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \cdot \frac{y_s}{\left\|\frac{\partial \bar r}{\partial s}\right\|}$$

På samma sätt: $= \frac{\partial \phi}{\partial z} \cdot \frac{x_s}{\left\|\frac{\partial \bar r}{\partial s}\right\|}$

Alltså är

$$\rho_0 \bar g - \rho_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \bar r}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\frac{\partial \bar r}{\partial s}}{\left\|\frac{\partial \bar r}{\partial s}\right\|}\right) = 0$$

$$\rho_0 \bar g + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\frac{\partial \phi}{\partial z}}{\left\|\frac{\partial \bar r}{\partial s}\right\|}\frac{\partial \bar r}{\partial s}\right) = \rho_0 \frac{\partial^2 \bar r}{\partial t^2} \overset{(1)}{\implies} \sigma = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$\Big\Downarrow (3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \sigma_0(s) + E(z-1) \qquad (5)$$

$$\phi(s,z) = (\sigma_0(s) - E)z + \frac{E}{2}z^2 + C(s)$$

Om vi för sträng i vila (d v s $z = \left\|\frac{\partial \bar r}{\partial s}\right\| = 1$) kräver att $\phi(s,1) = 0$ får vi

$$\sigma_0(s) - E + \frac{E}{2} + C(s) = 0$$

$$C(s) = \frac{E}{2} - \sigma_0(s)$$

Strängens potentiella energi enligt Hookes lag blir därför

$$\boxed{\phi(s,z) = \sigma_0(s)(z-1) + \frac{E}{2}(z-1)^2, \quad \text{där } z = \left\|\frac{\partial \bar r}{\partial s}\right\| = \frac{\rho_0}{\rho}}$$

Randvillkor

Antag att strängen är låst i punkten $s=0$ och kan röra sig fritt i $s = L_1$, dvs

$$\begin{cases} \bar r(0,t) = \bar 0 \\ \bar r(L_1,t) = \text{"fri"} \end{cases} \overset{?}{\implies} \boxed{\frac{\partial L}{\partial \bar r_s} = \bar 0} \quad \text{(Naturligt randvillkor)} \overset{(4)}{\implies} 0 = \frac{\partial \phi}{\partial z} \overset{(5)}{=} \sigma_0 + E(z-1)$$

Detta ger randvillkoret $\boxed{\left\|\frac{\partial \bar r}{\partial s}(L_1,t)\right\| = 1 - \frac{\sigma_0}{E}}$.

Utan Hookes lag får man randvillkoret $\sigma(L_1,t) = 0$, dvs ingen spänning i fria änden.

F08b Variationskalkyl (forts), sid 2

den 15 augusti 2020 06:12

Lagranges metod:

Antag att vi vill bestämma extremvärden till funktionen

$$f(x), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

av n variabler givet att

$$g(x) = C \quad \text{(bivillkor)}.$$

Då introducerar vi funktionen

$$f^*(x, \lambda) = f(x) + \lambda(g(x) - C)$$

av $n+1$ variabler och löser

$$\nabla f^* = \bar{0}.$$

Isoperimetriska problem (integralbivillkor) ← Avsnitt 4.6 i Logan

Antag att vi vill bestämma extremvärden till funktionalen

$$J(x) = \int_a^b L(t, x, \dot{x})\,dt, \quad x \in C^2([a,b])$$

givet att

$$K(x) = \int_a^b M(t, x, \dot{x})\,dt = C \quad \text{(bivillkor)}.$$

Då introducerar vi funktionalen

$$J^*(x, \lambda) = J(x) + \lambda(K(x) - C), \quad x \in C^2([a,b]), \lambda \in \mathbb{R}$$

Eftersom

$$\delta_x J^* = \delta_x J + \lambda \delta_x K = \delta_x (\overbrace{J + \lambda K}^{L^*})$$

ser vi att extremaler till J^* uppfyller ekv.

$$\frac{\partial L^*}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$

där $L^* = L + \lambda M$. Talet λ kallas för Lagrangemultiplikator.

Ex: Schrödingers ekvation (Exempel 4.30 i Logan)

Vi vill minimera

$$J(\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\hbar^2}{2m}\psi'^2 + V(x)\psi^2\right) dx$$

under bivillkoret att $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)^2\,dx = 1$

Sätt

$$H^* = \frac{\hbar^2}{2m}(\psi')^2 + V(x)\psi^2 - \underbrace{E}_{\text{Lagrange multiplikator}}\psi^2$$

Euler-Lagranges ekvationer för H^* blir då

$$\frac{\partial H^*}{\partial \psi} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial H^*}{\partial \psi'}\right) = 0$$

$$2\psi V(x) - 2\psi E - \frac{d}{dx}\left(\frac{\hbar^2}{m}\psi'\right) = 0$$

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + V(x)\psi = E\psi \quad \text{(tidsoberoende Schrödingerekvationen)}}$$

Punktvisa bivillkor

Extremvärden till

$$J(x) = \int_a^b L(t, x, \dot{x})\,dt, \quad x \in C^2([a,b])$$

som uppfyller bivillkoret

$$G(t, x, \dot{x}) = C \quad \text{(punktvis)}$$

fås genom att bilda funktionalen

$$J^*(x, \lambda) = \int_a^b L(t, x, x') + \lambda(t)(G(t, x, \dot{x}) - C)\,dt$$

Obs! Lagrangemultiplikatorn är nu en funktion, dvs $\lambda \in C([a,b])$. Extremaler till J^* uppfyller

$$\frac{\partial L^*}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$

där $L^* = L(t, x, \dot{x}) + \lambda(t)(G(t, x, \dot{x}) - C)$.

F08b Skalärprodukter och normer för Hilbertrum (Avsnitt 5.2.1 i Logan)

den 15 augusti 2020 20:52

Definition (skalärprodukt)

För ett vektorrum H över $\mathbb{R}$ (eller $\mathbb{C}$) är en skalärprodukt $\underbrace{(\cdot,\cdot)}_{\text{eller } \langle \cdot,\cdot \rangle} : H\times H \to \mathbb{R}$

en avbildning med följande karakteristiska egenskaper:

(S1) $(x,y) = \overline{(y,x)} \quad \forall\, x,y \in H$

(S2) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x,z) + \beta(y,z), \quad \forall\, x,y,z \in H,\ \alpha,\beta \in \mathbb{C}$ eller $\mathbb{R}$

(S3) $\begin{cases} (x,x) \geq 0 & \forall\, x \in H \\ (x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{cases}$

Skalärprodukten definierar en norm

$$\|x\| = (x,x)^{1/2}$$

Sats (Cauchy-Schwarz olikhet)

$$|(x,y)| \leq \|x\|\,\|y\| \quad \forall\, x,y \in H.$$

Detta implicerar triangelolikheten

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Bevis

$$\|x+y\|^2 = (x+y,\ x+y) \overset{(S2)}{=} (x,\ x+y) + (y,\ x+y) \overset{(S1)}{=} \overline{(x+y,x)} + \overline{(x+y,y)} \overset{(S2)}{=}$$

$$= \overline{(x,x)} + \overline{(y,x)} + \overline{(x,y)} + \overline{(y,y)} = (x,x) + (x,y) + \overline{(x,y)} + (y,y) =$$

$$= \|x\|^2 + 2\underbrace{\mathrm{Re}((x,y))}_{\leq |(x,y)| \leq \|x\|\,\|y\|} + \|y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$$

V. S. V.

den 15 augusti 2020 22:02

Ex: För $\mathbb{C}^n$ kan vi definiera skalärprodukten

$$(x, y) = x^T \bar{y} = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + \cdots + x_n \bar{y}_n.$$

Ex: $H = L^2(a,b)$ består av alla rellvärda (eller alla komplexvärda) funktioner $u : (a,b) \to \mathbb{R}$ sådana att

$$\|u\|^2 = \int_a^b |u(x)|^2 \, dx < \infty.$$

$L^2(a,b)$ har även skalärprodukten

$$(u, v) = \int_a^b u(x) \overline{v(x)} \, dx.$$

Ex: $H = L^2_w(a,b)$ = viktade L^2-rumet med viktfunktion $w \geq 0$ sådan att

$$\|u\|^2 = \int_a^b |u(x)|^2 \cdot w(x) \, dx < \infty \quad \text{för alla } u \in L^2_w(a,b) \text{ och}$$

$$\langle u, v \rangle = \int_a^b u(x) \overline{v(x)} \, dx.$$

Ex: $H = H^1(a,b)$ definieras av

$$(u, v) = \int_a^b \left(u(x) \overline{v(x)} + u'(x) \overline{v'(x)} \right) dx \quad \text{och}$$

$$\|u\|^2 = \langle u, u \rangle < \infty.$$

$H^1(a,b)$ är ett så kallat Sobolevrum. Det följer att $H^1(a,b) \subseteq L^2(a,b)$.