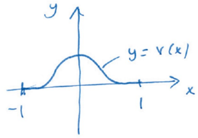
Täta delmängder

oändligt många gånger deriverbara

Klassen $C_c^\infty(a,b)$ består av alla släta funktioner $v:(a,b)\to\mathbb{R}$ som har kompakt stöd i (a,b).

Ex. $v(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & |x|<1 \\ 0, & |x|\geq 1 \end{cases}$



v:s stöd är

$\operatorname{supp} v = \overline{\{x\in\mathbb{R} : v(x)\neq 0\}} = [-1,1]$ (kompakt mängd)

Sats $C_c^\infty(a,b)$ är en tät delmängd till $L^2(a,b)$, d v s varje $v\in L^2(a,b)$ kan approximeras till godtycklig precision med en följd $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ i $C_c^\infty(a,b)$, d v s

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n - v\| = 0.$$

Sats $C^\infty([a,b])$ är en tät delmängd till $H^1(a,b)$

($C_c^\infty(a,b)$ är en tät delmängd till $H_0^1(a,b)$.)

Hilbertrum: $(H_0^1(a,b)\subset) H^1(a,b)\subset L^2(a,b)$

Testfunktioner: $C_c^\infty(a,b)\subset \dots \subset C_c^1(a,b)\subset C_c(a,b)$

Spektralsatsen (linjär algebra)

Låt $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ vara en symmetrisk matris $\underbrace{}_{=x\cdot(Ay)=x^TAy}$ Då gäller

d v s $A^T=A \iff \underbrace{(Ax,y)}_{=(Ax)^Ty=x^TA^Ty}=(x,Ay)\quad \forall x,y\in\mathbb{R}^n$.

(i) A har reella egenvärden.

(ii) Egenvektorer till A som har olika egenvärden är ortogonala

(iii) Det finns en ortogonal bas av egenvektorer $\{u_i\}_{i=1}^n$ till A.

(iv) A kan diagonaliseras med en ortogonal matris:

$$A=UDU^T,\qquad U^TU=I$$

Självadjungerade operatorer

Motsvarigheten till symmetriska matriser i Hilbertrum är självadjungerade operatorer. Låt

$$A: D(A)\to H \quad \text{vara en linjär operator}$$

där $D(A)$ är en tät delmängd av H. Vi säger att A är självadjungerad om

$$(Au,v)=(u,Av)\qquad \forall u,v\in D(A).$$

Sats En självadjungerad operator $A: D(A)\to H$ kan bara ha reella egenvärden.

Bevis: Antag att A är som ovan och $Au=\lambda u$ för något $u\neq 0$. Då följer att

$$\lambda(u,u)=(\lambda u,u)=(Au,u)=(u,Au)=\overline{(Au,u)}=\overline{\lambda(u,u)}$$

$$\lambda\|u\|^2=\bar\lambda\|u\|^2$$

$$\lambda=\bar\lambda \qquad \text{V.S.V.}$$

Sats Låt $A: D(A)\to H$ vara en självadjungerad operator. Om u_1 och u_2 är egenvektorer till A, d v s $u_1\neq u_2$, $u_1\neq 0\neq u_2$

$$Au_1=\lambda_1 u_1 \quad \text{och} \quad Au_2=\lambda_2 u_2$$

med olika egenvärden $\lambda_1\neq\lambda_2$, så är

$$(u_1,u_2)=0.$$

d v s u_1 och u_2 är ortogonala.

> Kommentar: Egenvärden till en självadjungerad operator är reella och egenvektorer från olika egenrum är parvis ortogonal. Det är dock inte alltid sant att egenvektorerna bildar en ortogonal bas i H.

Bevis: Eftersom A är självadjungerad så är

$$\lambda_1(u_1,u_2)=(\lambda_1u_1,u_2)=(Au_1,u_2)=(u_1,Au_2)=(u_1,\lambda_2u_2)=\underbrace{\bar\lambda_2}_{=\lambda_2}(u_1,u_2)$$

$$\Downarrow$$

$$0=(\lambda_2-\lambda_1)(u_1,u_2)$$

$$0=(u_1,u_2) \qquad \text{V.S.V.}$$

Sturm-Liouvilleproblem

Låt L beteckna en linjär differentialoperator på formen

$$Lu = -(p(x)u')' + q(x)u, \quad u \in C^2([a,b])$$

där $p \in C^1([a,b])$ och $q \in C([a,b])$ är reella funktioner med $p(x) > 0$ (eller $p(x) < 0$). Ett randvärdesproblem för L formuleras som

$$(1) \begin{cases} Lu(x) = f(x) & x \in (a,b) \\ \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0 \\ \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0 \end{cases} \text{(randvillkor)}$$

De vanligaste randvillkoren $(x=a)$ är

(1) $u(a) = 0$ (Dirichlet-villkor)

(2) $u'(a) = 0$ (Neumann-villkor)

(3) $\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0$ (Robin-villkor)

(4) $u(a) = u(b)$ (periodiskt-villkor)

Obs! Många intressanta BVP har blandade randvillkor.

Randvärdesproblemet (1) kan lösas genom att först bestämma egenfunktionerna till L. Detta kallas för Fouriers metod.

Egenvärdesproblemet

Sturm-Liouvilles egenvärdesproblem är

$$(2) \begin{cases} Lu = \lambda u & i\ (a,b) \\ u(a) = 0 \\ u(b) = 0 \end{cases} \text{(Dirichlet-villkor)}$$

där $Lu = -(pu')' + qu$ (*).

Obs! Randvillkoren kan varieras.

Vi betraktar L som en linjär operator

$$L : \underbrace{C_0^2([a,b])}_{=C_0^2([a,b])} \to C([a,b]) \subset L^2(a,b),$$

d v s $D(L) = \{u \in C^2([a,b]) : u(a) = u(b) = 0\}$.

Sats $L : D(L) \to L^2(a,b)$ är självadjungerad, d v s (med L^2-skalärprodukt)

$$(Lu, v) = (u, Lv) \quad \forall u, v \in C_0^2([a,b]).$$

Bevis:

$$(Lu, v) \overset{(*)}{=} \int_a^b (-(pu')' + qu)\bar{v}\, dx = \int_a^b (-(pu')'\bar{v} + qu\bar{v})\, dx =$$

part int!

$$= \underbrace{[-pu'\bar{v}]_a^b}_{=0} + \int_a^b (pu'\bar{v}' + qu\bar{v})\, dx =$$

par int!

$$= \underbrace{[u p\bar{v}']_a^b}_{=0} + \int_a^b (-u(p\bar{v}')' + uq\bar{v})\, dx =$$

$$= \int_a^b u\overline{(-(pv')' + qv)}\, dx = (u, Lv) \quad \text{v.s.v.}$$

Sats Sturm-Liouville operatorn $L : D(L) \to L^2(a,b)$ har oändligt många reella egenvärden $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ som kan ordnas i växande följd

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots \quad \text{med} \quad \lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty.$$

Till varje egenvärde λ_n finns det ett egenrum E_n som spänns upp av en reellvärd egenfunktion u_n, d v s

$$Lu_n = \lambda_n u_n, \quad u_n \in E_n, \quad \dim E_n = 1.$$

Egenfunktionerna $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ är ortogonala i $L^2(a,b)$.

Sats Om L är positiv d v s

$$(Lu, u) > 0 \quad \forall u \neq 0$$

så kan L bara ha positiva egenvärden $\lambda > 0$.

Bevis

Om L är positiv och $Lu = \lambda u$ för $u \neq 0$ så är

$$0 < (Lu, u) = (\lambda u, u) = \lambda (u,u) = \lambda \|u\|^2$$

$$\Downarrow$$

$$0 < \lambda \quad \text{v.s.v.}$$

Ex:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Lös differentialekvationen} \\ \quad -u'' = \lambda u \quad i \quad (0,L) \\ \text{med randvillkor} \\ \quad a)\ u(0) = u(L) = 0 \ \text{(Dirichlet)} \\ \quad b)\ u'(0) = u'(L) = 0 \ \text{(Neumann)}\end{array}}$$

Egenvärdesproblem för Sturm-Liouvilleoperatorn

$$Lu = -u''$$

a) L positiv?

$$(Lu,u) = \int_0^L -u''u\,dx \overset{\text{Partiell integration}}{=} [-u'u]_0^L + \int_0^L u'u'\,dx = \int_0^L (u')^2\,dx \geq 0$$

Med likhet bara om $u(x) = \text{konstant}$, dvs enligt a) bara om $u(x)=0$, vilket ej är egenfunktion.

Alltså $\lambda > 0$. Sätt $\lambda = \omega^2$:

$$-u'' = \omega^2 u \Rightarrow u(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x) \quad \text{med randvillkor}$$

$$0 = u(0) = A$$

$$0 = u(L) = \underbrace{B}_{\neq 0}\sin(\omega L), \quad \omega > 0$$

$$\omega L = n\pi, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L}$$

Alltså

$$\begin{cases}\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \\ u_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\end{cases} \quad \text{för } n \in \mathbb{Z}_+$$

(Som väntat: $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots$, $\lambda_n \to \infty$ då $n \to \infty$

$$(u_n,u_n) = \int_0^L \sin^2(\omega_n x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^L \underbrace{(\sin^2(\omega_n x) + \cos^2(\omega_n x))}_{=1}\,dx = \frac{L}{2}$$

$$(u_n, u_m) = 0$$)

b) Som ovan får vi

$$u(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$$

$$u'(x) = -A\omega\sin(\omega x) + B\omega\cos(\omega x) \quad \text{med randvillkor}$$

$0 = u'(0) = B\omega \Rightarrow B = 0$ eller $\omega = 0$, dvs $u(x) = A$, vi väljer $u(x) = 1 \Rightarrow \lambda_0 = 0$

$\omega \neq 0$ och $0 = u'(L) = \underbrace{-A\omega}_{\neq 0}\sin(\omega L) \Rightarrow \omega L = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}_+$

Alltså:

$$\begin{cases}\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \\ u_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\end{cases} \quad n = 0,1,2,\ldots$$

(· man kan kontrollera att $(u_m,u_n) = 0$ då $m \neq n$.
· $(u_0,u_0) = \int_0^L 1\,dx = L$
· $(u_n,u_n) = \int_0^L \cos^2(\omega_n x)\,dx = \frac{L}{2}$)