F10a Baser i Hilbertrum, sid 1

den 16 augusti 2020 20:55

Definition Vi säger att $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ är en ortonormal följd i Hilbertrummet H om

$$(u_n, u_m) = \begin{cases} 1 & (m=n) \\ 0 & (m \neq n). \end{cases}$$

Obs! Ortogonala vektorer är linjärt oberoende.

Definition Vi säger att $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ är en ON-bas för H om ändliga linjära kombinationer

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_N u_N, \quad c_i \in \mathbb{C}$$

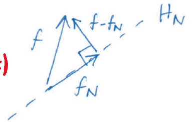
är en tät delmängd av H. Dvs om varje $f \in H$ kan approximeras med godtycklig precision av en vektor i det ändligt dimensionella rummet

$$H_N = \text{Span}\{u_1, u_2, \dots, u_N\}$$ för något $N \in \mathbb{Z}_+$

Sats Bästa approximationen till $f \in H$ i H_N ges av $f_N = \sum_{n=1}^{N} c_n u_n$ där $c_n = (f, u_n)$.

Då gäller Pythagoras sats.

$$\|f\|^2 = \|f_N\|^2 + \|f - f_N\|^2 \quad (*)$$



Bevis. "Matte 3": ortogonal projektion på underrummet H_N, dvs $f_N = P_{H_N} f = \sum_{n=1}^{N} \frac{(f,u_n)}{\underbrace{(u_n,u_n)}_{=1}} u_n$.

$$(*) \Rightarrow \|f_N\|^2 = \|f\|^2 - \|f-f_N\|^2 \leq \|f\|^2$$

Kommentar: Av detta följer Bessels olikhet

$$\|f_N\|^2 \leq \|f\|^2 \iff \sum_{n=1}^{N} |(f,u_n)|^2 \leq \|f\|^2$$

Definition Vi säger att

$$f_N = \sum_{n=1}^{N} c_n u_n, \quad \text{där } \boxed{c_n = (f, u_n)},$$

är Fourierserien av f i ON-basen $\{u_n\}_{n=1}^{N}$.

Sats Om $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ är en ON-bas för H så konvergerar Fourierserien av f mot f, dvs

$$\lim_{N\to\infty} \|f - f_N\| = 0 \quad \forall f \in H$$

och

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(f,u_n)|^2 \quad \text{(Parsevals identitet).}$$

Fourierkoefficienter

Bevis Från definitionen av bas följer att $\|f - f_N\| \to 0$ när $N \to \infty$. Pythagoras sats ger att

$$\|f\|^2 = \|f_N\|^2 + \|f - f_N\|^2$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{N\to\infty} \|f_N\|^2 = \lim_{N\to\infty} \left(\|f\|^2 - \underbrace{\|f - f_N\|^2}_{\to 0}\right) = \|f\|^2$$

$$\Downarrow$$

$$\|f\|^2 = \lim_{N\to\infty} \|f_N\|^2 = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} |c_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2, \quad c_n = (f, u_n)$$

V.S.V.

Sats Låt $L = -(pu')' + qu$ vara en Sturm-Liouville operator s.a. $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$. Då finns det en ortonormal följd $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ av egenfunktioner

$$\begin{cases} Lu_n = \lambda_n u_n \\ \alpha_1 u_n(a) + \alpha_2 u_n'(a) = 0 \\ \beta_1 u_n(b) + \beta_2 u_n'(b) = 0 \end{cases}$$

som är ON-bas för $L^2(a,b)$.

F08b: $H^1(a,b)$ definieras av $(u,v) = \int_a^b \left(u(x)\overline{v(x)} + u'(x)\overline{v'(x)}\right) dx$

$f \in H_0^1(a,b) \overset{(?)}{\Leftrightarrow} f \in H^1(a,b)$ och f har kompakt stöd i (a,b)

Bevis. Kräver en grundkurs i funktionalanalys.

Randvärdesproblemet

Vi vill bestämma en lösning till problemet

$$\begin{cases} Lu = f \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \quad \text{(Dirichlet villkor)}.$$

Fouriersmetod:
Antag att $f \in L^2(a,b)$ och $u = L^2(a,b)$. Låt $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ vara en ON-bas av egenfunktioner till L, dvs

$$\begin{cases} L\psi_n = \lambda_n \psi_n \\ \psi_n(a) = \psi_n(b) = 0 \end{cases} \qquad (0)$$

Utveckling av f och u i basen $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ger

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \psi_n, \quad f_n = (f, \psi_n) \quad \text{(givna)}$$

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n, \quad c_n = (u, \psi_n) \quad \text{(sökes)}$$

Svag formulering:
Vi multiplicerar $Lu = f$ med en "testfunktion" $v \in C_c^{\infty}(a,b)$ och integrerar partiellt:

$$\int_a^b Lu\, v\, dx = \int_a^b f v\, dx \Rightarrow \boxed{\int_a^b pu'v' + quv\, dx = \int_a^b fv\, dx, \quad \forall v \in C_c^{\infty}(a,b)} \quad (1)$$

Egenfunktionerna uppfyller $\underbrace{L\psi_n}_{u} \overset{(0)}{=} \underbrace{\lambda_n \psi_n}_{f}$

Svag formulering
Sätt $u = \psi_n$ och $f = \lambda_n \psi_n$ i (1):

$$\boxed{\int_a^b p\psi_n' v' + q\psi_n v\, dx = \lambda_n \int_a^b \psi_n v\, dx} \quad (2)$$

$\forall v \in C_c^{\infty}(a,b)$. Genom approximation kan v väljas i rummet $H_0^1(a,b)$. Vi antar att $\psi_n, u \in H_0^1(a,b)$.

$v = \psi_m$ i (2) $\Rightarrow$

$$\int_a^b p\psi_n'\psi_m' + q\psi_n\psi_m\, dx = \lambda_n \int_a^b \psi_n\psi_m\, dx = \begin{cases} \lambda_n & (m=n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$

Vi ser att $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ är parvis ortogonala i skalärprodukten

$$\langle u, v \rangle = \int_a^b pu'v' + quv\, dx$$

Välj nu $v = \psi_n$ i (1) $\Rightarrow$

$$\underbrace{\int_a^b pu'\psi_n' + qu\psi_n}_{} = \int_a^b f\psi_n\, dx \overset{(2)}{\Rightarrow}$$

$$\lambda_n \int_a^b u\psi_n\, dx = \int_a^b f\psi_n\, dx \Rightarrow$$

$$\lambda_n (u, \psi_n) = (f, \psi_n) \Rightarrow$$

$$\lambda_n c_n = f_n \Rightarrow \boxed{c_n = \frac{f_n}{\lambda_n}}$$

Lösningen u:s Fourierserie är alltså

$$\boxed{u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\lambda_n}\psi_n, \quad f_n = (f, \psi_n)}$$

Serien konvergerar i $L^2(a,b)$ (och $H_0^1(a,b)$).
En approximativ lösning fås av

$$u_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{f_n}{\lambda_n}\psi_n \in H_N = \operatorname{Span}\{\psi_1, \dots, \psi_N\}$$

Ex. Värmeledningsproblem:

$$(0)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x) & (0<x<L,\ 0<x<T) \\ u(x,0) = g(x) & \text{(begynnelsevärde)} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \end{cases}$$

Svag formulering:
Multiplicera ekv. med en testfunktion $v \in C^\infty([0,L])$ och integrera från $x=0$ till L $\Rightarrow$

$$\int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) v\,dx = \int_0^L f v\,dx \implies$$

$$\int_0^L \frac{\partial u}{\partial t} v + \frac{\partial u}{\partial x} v'\,dx - \left[k \frac{\partial u}{\partial x} v\right]_{x=0}^{L} = \int_0^L f v\,dx$$

Om vi väljer v s.a $v(L)=0$ får vi

$$(1)\quad \boxed{\int_0^L \frac{\partial u}{\partial t} v + \frac{\partial u}{\partial x} v'\,dx = \int_0^L f v\,dx} \quad \forall v \in H^1(0,L):\ v(L)=0$$

Antag nu att

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\,\psi_n(x), \quad c_n(t) = (u(\cdot,t), \psi_n) \qquad (A)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n\,\psi_n(x), \quad f_n = (f, \psi_n) \qquad (B)$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n\,\psi_n(x), \quad g_n = (g, \psi_n) \qquad (C)$$

där $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ är ON-bas i $L^2(0,L)$ av egenfunktioner till operatorn $-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ i stationära värmeledningsproblemet, dvs jämviktstillstånd utan beroende av t i (0):

$$(*)\begin{cases} -\psi_n'' = \lambda_n \psi_n & (0<x<L) \\ \psi_n'(0) = 0 \\ \psi_n(L) = 0 \end{cases}$$

Partiell integration med $\psi_n'(0) = v(L) = 0$ ger

$$\int_0^L -\psi_n''(x)\,v(x)\,dx = \underbrace{\left[-\psi_n'(x)\,v(x)\right]_0^L}_{=0} + \int_0^L \psi_n'(x)\,v'(x)\,dx$$

Svag formulering:

$$(2)\quad \boxed{\int_0^L \psi_n' v'\,dx = \lambda_n \int_0^L \psi_n v\,dx} \quad \forall v \in H^1(0,L):\ v(L)=0. \qquad (D)$$

Sätt $v = \psi_n$ i (1) $\Rightarrow$

$$\int_0^L \frac{\partial u}{\partial t}\psi_n\,dx + \int_0^L \frac{\partial u}{\partial x}\psi_n'\,dx = \int_0^L f\psi_n\,dx \implies$$

(A) (D),(A) (B)

$$\boxed{c_n'(t) + \lambda_n c_n(t) = f_n} \quad \text{ODE!}$$

Begynnelsevillkoret:

$$u(x,0) = g(x) \implies (u(\cdot,0), \psi_n) = (g, \psi_n) \overset{(A),(C)}{\implies}$$

$$\boxed{c_n(0) = g_n}$$

Alltså

$$\begin{cases} e^{\lambda_n t}\left(c_n'(t) + \lambda_n c_n(t)\right) = f_n \cdot e^{\lambda_n t} \\ c_n(0) = g_n \end{cases} \quad (n = 1,2,3,\ldots)$$

$$\implies \frac{d}{dt}\left(e^{\lambda_n t} c_n\right) = e^{\lambda_n t} f_n \implies e^{\lambda_n t} c_n = \frac{1}{\lambda_n} e^{\lambda_n t} f_n + C$$

$$c_n(t) = \frac{1}{\lambda_n} f_n + C e^{-\lambda_n t}, \quad c_n(0) = g_n \implies C = g_n - \frac{1}{\lambda_n} f_n$$

$$\implies \boxed{c_n(t) = \frac{1}{\lambda_n} f_n \left(1 - e^{-\lambda_n t}\right) + g_n e^{-\lambda_n t}}$$

Lösning:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{f_n}{\lambda_n}\left(1 - e^{-\lambda_n t}\right) + g_n e^{-\lambda_n t} \right) \psi_n(x)$$

där lösning av (*) som i Matte 3 respektive Matematisk fysik ger

$$\begin{cases} \lambda_n = \left(\dfrac{\pi(n-\frac{1}{2})}{L}\right)^2 & (n = 1,2,3,\ldots) \\ \psi_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{L}} \cos\left(\dfrac{\pi(n-\frac{1}{2})x}{L}\right) \end{cases}$$

f_n och g_n kan beräknas i Matlab enligt

$$f_n = (f, \psi_n) = \int_0^L f(x)\,\psi_n(x)\,dx$$

$$g_n = (g, \psi_n) = \int_0^L g(x)\,\psi_n(x)\,dx$$