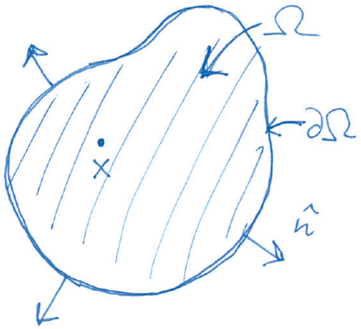
F11 Partiella differentialekvationer (Kapitel 6 i Logan), sid 1

den 17 augusti 2020 12:01

Låt Ω beteckna en öppen sammanhängande begränsad mängd i $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ med rand $\partial\Omega$. Vi antar att $\partial\Omega$ är en (styckvis) slät kurva (eller yta om $n \geq 3$) orienterad med en enhetsnormal $\hat{n}$.



- $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ rumsvariabel
- $t \in \mathbb{R}$ tidsvariabel
- $u(x,t)$ funktion definierad på $\Omega \times (0,T)$

Gauss sats:

$$\int_{\partial\Omega} \bar{v} \cdot \hat{n}\, dS = \int_{\Omega} \nabla \cdot \bar{v}\, dx \quad \forall\, \bar{v} \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$$

där

$$\nabla \cdot \bar{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}$$

är <u>divergensen</u> av vektorfältet

$$\bar{v}(x) = (v_1(x), v_2(x), \ldots, v_3(x)).$$

<u>Fyra viktiga PDE:r</u>

(1) $-\Delta u = 0$ i Ω (Laplaces ekv.)

(2) $-\Delta u = f$ i Ω (Poissons ekv.)

(3) $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f$ i $\Omega \times (0,T)$ (Värmeledning/diffusion)

(4) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f$ i $\Omega \times (0,T)$ (vågekvationen)

Där Δ betecknar Laplaceoperatorn:

$$\Delta u = \nabla \cdot (\nabla u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}.$$

En klassisk kurs i PDE behandlar ekv. (1-4) i sagda ordning.

Begynnelsevillkor $(t=0)$:

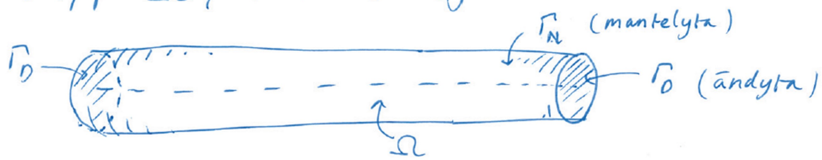
$$u(x,0) = u_0(x) \qquad (x \in \Omega)$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0(x)$$

Randvillkor:

$$u(x,t) = h(x,t) \qquad (x \in \partial\Omega)$$
$$\frac{\partial u}{\partial \hat{n}}(x,t) = g(x,t)$$

Värmeledningsekvationen

Betrakta värmeledning i en tredimensionell kropp Ω, t ex en cylindrisk stav:



$\partial\Omega = \Gamma_N \cup \Gamma_D$. Låt V beteckna en öppen delmängd av staven Ω.

Den värmeenergi som finns inom området V är

$$\underset{[J]}{E} = \int_V c\rho u\, dx, \quad \text{där} \begin{cases} \bullet\ u\ [{}^\circ C] & \text{temperatur} \\ \bullet\ \rho\ [kg \cdot m^{-3}] & \text{massdensitet} \\ \bullet\ c\ [J \cdot kg^{-1} \cdot {}^\circ C^{-1}] & \text{specifik värmekapac.} \end{cases}$$

Värmeenergin inom V kan förändras på två sätt

$$\frac{dE}{dt} = \underbrace{-\int_{\partial V} J \cdot \hat{n}\, dS}_{\substack{\text{Energiflöde } [J \cdot s^{-1}] \\ \text{från omgivande} \\ \text{materia}}} + \underbrace{\int_V \rho f\, dx}_{\substack{\text{Värmeutveckling } [J \cdot s^{-1}] \\ \text{i omsluten materia}}}$$

$$\text{där} \begin{cases} \bullet\ J\ [J \cdot s^{-1} \cdot m^{-2}] & \text{energiflödesvektor} \\ \bullet\ f\ [J \cdot s^{-1} \cdot kg^{-1}] & \text{värmekälla} \end{cases}$$

Värmeenergi flödar från kallare områden till varmare områden enligt Fouriers lag:

$$J = -k \nabla u \quad \text{där} \quad k\ [J \cdot s^{-1} \cdot m^{-1} \cdot {}^\circ C^{-1}]$$

är konduktiviteten för materian i staven.

Således

$$\frac{d}{dt}\int_V c\rho u\, dx = \underbrace{-\int_{\partial V} (-k\nabla u) \cdot \hat{n}\, dS}_{\text{Gauss}} + \int_V \rho f\, dx \implies$$

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}(c\rho u)\, dx = \int_V \nabla \cdot (k \nabla u)\, dx + \int_V \rho f\, dx \implies$$

$$\int_V \left(\frac{\partial}{\partial t}(c\rho u) - \nabla \cdot (k\nabla u) - \rho f \right) dx = 0$$

Eftersom $V \subset \Omega$ är godtycklig drar vi slutsatsen att integranden är noll $\implies$ Värmeledningsekv.

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(c\rho u) - \nabla \cdot (k \nabla u) = \rho f \quad \text{i } \Omega}$$

där tabell i avsnitt 1.1.4 i Logan ger

- $u \sim \theta$
- $\rho \sim M \cdot L^{-3}$
- $c \sim L^2 \cdot T^{-2} \cdot \theta^{-1}$
- $k \sim L \cdot M \cdot T^{-3} \cdot \theta^{-1}$
- $f \sim L^2 \cdot T^{-3}$

	c	k	ρ	u	f
L	2	1	-3	0	2
T	-2	-3	0	0	-3
θ	-1	-1	0	1	0
M	0	1	1	0	0

den 17 augusti 2020 12:10

Dimensionsanalys:

Dimensionslösa storheter, tids- och längdskalor?

$$
\begin{array}{ccccc}
c & k & \rho & u & f
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccccc|cc}
2 & 1 & -3 & 0 & 2 & 1 & 0 \\
-2 & -3 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \\
-1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
\sim
\left[\begin{array}{ccccc|cc}
1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -\frac{3}{2} & -2 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -\frac{1}{2} & -1
\end{array}\right]
$$

$$
\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\\ \alpha_5\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}-\frac{3}{2}\\ 1\\ -1\\ -\frac{1}{2}\\ 0\end{bmatrix}
+ s\begin{bmatrix}-3\\ 1\\ -1\\ -2\\ 1\end{bmatrix}
\Rightarrow \ell = \frac{k}{\rho u^{1/2} c^{3/2}} \sim L
$$

$$
\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\\ \beta_4\\ \beta_5\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ -1\\ -1\\ 0\end{bmatrix}
+ s\begin{bmatrix}-3\\ 1\\ -1\\ -2\\ 1\end{bmatrix}
\Rightarrow \tau = \frac{k}{\rho u c^2} \sim T
$$

Dimensionslös storhet $\pi = \dfrac{kf}{\rho u^2 c^3}$

Om vi antar att c, ρ, k är konstanter och u_0 är en karakteristisk temperatur så får vi skalningen

$$
\hat{x} = \frac{x}{\ell}, \quad \hat{t} = \frac{t}{\tau}, \quad \hat{u}(\hat{x},\hat{t}) = \frac{u(x,t)}{u_0}
$$

$$
\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\ell}\frac{\partial}{\partial \hat{x}}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{\tau}\frac{\partial}{\partial \hat{t}} \Rightarrow
$$

$$
\frac{1}{\tau}\frac{\partial}{\partial \hat{t}}\left(c\rho u_0 \hat{u}\right) - \frac{1}{\ell}\nabla_{\hat{x}}\cdot\left(k\frac{1}{\ell}\nabla_{\hat{x}}(u_0\hat{u})\right) = \rho f
$$

$$
\frac{c\rho u_0}{\tau}\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} - \frac{k u_0}{\ell^2}\Delta_{\hat{x}}\hat{u} = \rho f
$$

där $\tau = \dfrac{k}{\rho u_0 c^2}$, $\ell = \dfrac{k}{\rho u_0^{1/2} c^{3/2}}$ $\Rightarrow$

$$
\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} - \frac{k\tau}{c\rho\ell^2}\Delta_{\hat{x}}\hat{u} = \frac{\tau f}{c u_0}
$$

$$
\frac{k\tau}{c\rho\ell^2} = \frac{k}{c\rho}\cdot\frac{k}{\rho u_0 c^2}\cdot\frac{\rho^2 u_0 \cdot c^3}{k^2} = 1
$$

$$
\frac{\tau f}{c u_0} = \frac{k}{\rho u_0 c^2}\cdot\frac{1}{c u_0} f = \frac{kf}{\rho u_0^2 c^3} = \pi_1 \sim 1
$$

Dimensionslös värmeledningsekv.:

$$
\boxed{\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} - \Delta_{\hat{x}}\hat{u} = \hat{f}}
$$

där $\hat{f}(\hat{x},\hat{t}) = \dfrac{kf(x,t)}{\rho u_0^2 c^3}$ och alla andra variabler är dimensionslösa.