Låt L beteckna en diff. op. av typen

$$Lu = -\nabla\cdot(P(x)\nabla u) + q(x)u$$
$$= -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + q(x)u.$$

där $P = \{p_{ij}\}_{i,j=1}^{n} \in C^1(\bar\Omega; \mathbb{R}^{n\times n})$ är en $n\times n$-matris och $q \in C(\bar\Omega)$ är en skalär. Operatorn L sägs vara *elliptisk* om $P^T = P$ och

$$\bar h \cdot P(x)\bar h > 0 \quad \forall \bar h \in \mathbb{R}^n,\ x \in \bar\Omega$$

d v s om $P(x)$ är *symmetrisk* och *positivt def.*
Vi antar även att $q(x) \geq 0$.

Kommentar: Elliptiska operatorer är en generalisering av Sturm-Liouville operatorer då $x = (x_1, \dots, x_n)$.

PDE-typer

(1) $Lu = f$ i Ω (elliptisk PDE)

(2) $\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = f$ i $\Omega \times (0,T)$ (parabolisk PDE)

(3) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Lu = f$ i $\Omega \times (0,T)$ (hyperbolisk PDE)

Ex. Om $P(x) = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} = (\delta_{ij})_{i,j=1}^{n}$ och $q(x) = 0$ så blir

$$Lu = -\Delta u \quad \text{(Laplace-operatorn)}$$

Hilbertrum

Låt $L^2(\Omega)$ vara mängden av alla funktioner $u: \Omega \to \mathbb{C}$ s.a.

$$\int_\Omega |u(x)|^2 dx < \infty.$$

Skalärprodukten på $L^2(\Omega)$ betecknas

$$(u,v) = \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}\,dx.$$

Sats $L^2(\Omega)$ är ett Hilbertrum.

Bevis. Se kurs i Integrationsteori.

Låt $H^1(\Omega)$ vara mängden av alla funktioner $u: \Omega \to \mathbb{C}$ s.a.

$$\int_\Omega |u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2 dx < \infty$$

Skalärprodukt:

$$\langle u,v\rangle = \int_\Omega u(x)\overline{v(x)} + \nabla u(x)\cdot\overline{\nabla v(x)}\,dx$$

Neumannproblemet:

$$(N)\begin{cases} Lu = f & \text{i } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \hat n} = h & \text{på } \partial\Omega \end{cases} \qquad \boxed{\text{Obs! } \frac{\partial u}{\partial \hat n} = \nabla u \cdot \hat n}$$

Om $h = \frac{\partial g}{\partial \hat n}$, sätt $\tilde u = u - g \Rightarrow$

$L\tilde u = L(u-g) = Lu - Lg = f - Lg = \tilde f \Rightarrow$

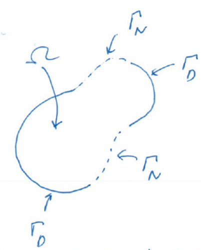
$\frac{\partial \tilde u}{\partial \hat n} = \frac{\partial}{\partial \hat n}(u-g) = \frac{\partial u}{\partial \hat n} - \frac{\partial g}{\partial \hat n} = 0$

$$(\tilde N)\begin{cases} L\tilde u = \tilde f \\ \frac{\partial \tilde u}{\partial \hat n} = 0 \end{cases} \qquad (N \Leftrightarrow \tilde N)$$

Vi kan anta att randvillkoren är homogena genom att modifiera f.

Blandade randvillkor

$$\begin{cases} Lu = f & \text{i } \Omega \\ u = 0 & \text{på } \Gamma_D \\ \frac{\partial u}{\partial \hat n} = 0 & \text{på } \Gamma_N \end{cases}$$



$\boxed{\Gamma_D \cup \Gamma_N = \partial\Omega}$

Kommentar. Om $\Gamma_D = \partial\Omega$, $\Gamma_N = \emptyset$ så får vi Dirichletproblemet.
Om $\Gamma_N = \partial\Omega$, $\Gamma_D = \emptyset$ så får vi Neumannproblemet.

Lemma 1 (Partiell integration)

$$\int_\Omega \overbrace{Lu}^{-\nabla\cdot(P(x)\nabla u)v(x)+q(x)u\,v(x)} v\,dx = \int_\Omega (P\nabla u)\cdot\nabla v + quv\,dx - \int_{\partial\Omega} v(P\nabla u\cdot\hat{n})\,dS$$

$\forall\ u,v \in C^1(\bar\Omega)$.

Bevis

Vi vill visa att

$$\int_{\partial\Omega} v(P\nabla u\cdot\hat n)\,dS = \int_\Omega (P\nabla u)\cdot\nabla v\,dx + \int_\Omega \nabla\cdot(P(x)\nabla u)\,v\,dx$$

$$VL = \int_{\partial\Omega} (vP\nabla u)\cdot\hat n\,dS \overset{\text{Gauss}}{=} \int_\Omega \nabla\cdot(vP\nabla u)\,dx =$$

$$= \int_\Omega ((\nabla v)\cdot P\nabla u + v\,\nabla\cdot P\nabla u)\,dx = HL,\ \text{VSV}$$

Svag formulering:

Sats 1 Om $u\in C^2(\bar\Omega)$ så är

$$\begin{cases} Lu = f & i\ \Omega \\ u = 0 & på\ \Gamma_D \\ \frac{\partial u}{\partial \hat n} = 0 & på\ \Gamma_N \end{cases} \Longleftrightarrow \int_\Omega (P\nabla u)\cdot\nabla v + quv\,dx = \int_\Omega fv\,dx$$

för alla testfunktioner $v\in H^1(\Omega)$: $v=0$ på Γ_D.

Kommentar: Testfunktionerna behöver bara uppfylla Dirichletvillkoret (ej Neumannvillkoret).

Bevis (ej fullständigt)

$$Lu = f \Rightarrow \int_\Omega Lu\,v\,dx = \int_\Omega fv\,dx \overset{\text{Lemma 1}}{\Rightarrow}$$

$$\int_\Omega (P\nabla u)\cdot\nabla v + quv\,dx - \underbrace{\int_{\partial\Omega} v\left(P\frac{\partial u}{\partial\hat n}\right)dS}_{=0,\ \text{ty}\ v=0\ \text{på}\ \Gamma_D,\ \frac{\partial u}{\partial \hat n}=0\ \text{på}\ \Gamma_N} = \int_\Omega fv\,dx$$

$$\Rightarrow \int_\Omega (P\nabla u)\cdot\nabla v + quv\,dx = \int_\Omega fv\,dx.$$

Implikationerna kan reverseras ($\Leftarrow$) om $u\in C^2(\bar\Omega)$.

Av föregående sats följer att L är självadjungerad, dvs

$$(Lu,v) = (u,Lv) \quad \forall\ u,v\in C^2(\bar\Omega): v=0 \text{ på } \Gamma_D$$

Kom ihåg från föreläsning F09a, sid 1:

Kommentar: Egenvärden till en självadjungerad operator är reella och egenvektorer från olika egenrum är parvis ortogonala. Det är dock inte alltid sant att egenvektorerna bildar en ortogonal bas i H.

Sats 2 Låt L vara en elliptisk diff. op. på Ω. Då finns det en ON-bas $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ för $L^2(\Omega)$ av egenfunktioner

$$(E)\ \begin{cases} Lu_n = \lambda_n u_n & i\ \Omega \\ u_n = 0 & på\ \Gamma_D \\ \frac{\partial u_n}{\partial\hat n} = 0 & på\ \Gamma_N \end{cases}$$

s.a. $\lambda_1<\lambda_2<\dots$, $\lim_{n\to\infty}\lambda_n = \infty$ och

$$\int_\Omega u_n u_m\,dx = \begin{cases}1 & (m=n)\\ 0 & (m\neq n)\end{cases},\quad \int_\Omega (P\nabla u_n)\cdot\nabla u_m + q u_n u_m\,dx = \begin{cases}\lambda_n & (m=n)\\ 0 & (m\neq n)\end{cases}$$

Bevisidé: Den svaga formuleringen av (E) är (enligt Sats 1)

$$\int_\Omega (P\nabla u_n)\cdot\nabla v + q u_n v\,dx = \lambda_n\int_\Omega u_n v\,dx$$

för alla testfunktioner $v\in H^1(\Omega)$: $v=0$ på Γ_D.

Välj $v=u_m$ och utnyttja att $(u_n,u_m) = \begin{cases}1 & (m=n)\\ 0 & (m\neq n)\end{cases}$.

Existensen av egenfunktioner och egenvärden följer av den allmänna teorin för självadjungerade operatorer.

Ex. Visa att Poissons ekv.

$$\begin{cases} -\Delta u = f & i\ \Omega \\ u = 0 & på\ \partial\Omega \end{cases}$$

har en entydig (unik) lösning om $f \in L^2(\Omega)$.

Entydighet:

Antag att det finns två lösningar u_1 och u_2.
Sätt $\tilde{u} = u_1 - u_2$. Då uppfyller $\tilde{u}$

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{u} = -\Delta(u_1 - u_2) = f - f = 0 & i\ \Omega \\ \tilde{u} = 0 & på\ \partial\Omega \end{cases}$$

$$-\Delta\tilde{u} = 0 \Rightarrow \int_\Omega -\Delta\tilde{u}\cdot\tilde{u}\,dx = \int_\Omega 0\cdot\tilde{u}\,dx \xRightarrow{\text{Lemma 1 med } P(x)=I \text{ och } q(x)=0.}$$

$$\int_\Omega \nabla\tilde{u}\cdot\nabla\tilde{u}\,dx = 0 \Leftrightarrow \int_\Omega |\nabla\tilde{u}|^2 dx = 0 \Rightarrow \boxed{\nabla\tilde{u} = 0}$$

$$\Rightarrow \tilde{u} = \overbrace{\text{konstant}}^{\text{och kontinuerlig (ty deriverbar)}} \quad (\Omega \text{ är sammanhängande})$$

$$\tilde{u} = 0 \text{ på } \partial\Omega \Rightarrow \boxed{\tilde{u} = 0 \text{ i } \Omega} \Leftarrow u_1 = u_2 \text{ v.s.v.}$$

Existens:

Vi söker en lösning på formen av en Fourierserie

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x)$$

där $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ är ON-bas av egenfunktioner till (Enligt Sats 2)

$$\begin{cases} -\Delta u_n = \lambda_n u_n & i\ \Omega \\ u_n = 0 & på\ \partial\Omega \end{cases}$$

Svag formulering: (Sats 1 för $P(x) = I$ och $q(x) = 0$)

$$\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx = \int_\Omega f v\,dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

$$v = u_n \Rightarrow \underbrace{\int_\Omega \Big(\sum_{m=1}^{\infty} c_m \nabla u_m\Big)\cdot\nabla u_n\,dx}_{= \sum_{m=1}^{\infty} c_m \int_\Omega \nabla u_m\cdot\nabla u_n\,dx \overset{\text{Sats 2}}{=} c_n\lambda_n} = \underbrace{\int_\Omega f u_n\,dx}_{\overset{\text{def}}{=} f_n}$$

$$\lambda_n c_n = f_n \leftarrow \text{Fourier koeffic. av } f$$

$$\Rightarrow c_n = \frac{f_n}{\lambda_n} \Rightarrow \boxed{u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\lambda_n} u_n(x)}$$

Kommentar: Fourierserien konvergerar i $H_0^1(\Omega)$.
Kommentar 2: λ_n och u_n kan beräknas som i Matematisk fysik.

Ex. Visa att värmeledningsproblemet

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & i\ \Omega\times(0,T) \\ u|_{t=0} = u_0 \\ u = g & på\ \partial\Omega\times(0,T) \end{cases}$$

har högst en lösning. Antag att det finns två lösningar u_1 och u_2. Sätt $\tilde{u} = u_1 - u_2$. Då uppfyller $\tilde{u}$

$$\begin{cases} \frac{\partial\tilde{u}}{\partial t} - \Delta\tilde{u} = 0 & i\ \Omega\times(0,T) \\ \tilde{u}|_{t=0} = 0 \\ \tilde{u} = 0 & på\ \partial\Omega\times(0,T)\ (*) \end{cases}$$

$$= \int_\Omega \frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}\tilde{u}\,dx - \int_\Omega \Delta\tilde{u}\,\tilde{u}\,dx \overset{\text{Lemma 1 för } P(x)=I,\ q(x)=0}{=} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}\frac{\tilde{u}^2}{2}\,dx + \int_\Omega \nabla\tilde{u}\cdot\nabla\tilde{u}\,dx$$

$$0 = \int_\Omega \Big(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t} - \Delta\tilde{u}\Big)\tilde{u}\,dx \Rightarrow 0 = \underbrace{\underbrace{\frac{d}{dt}\int_\Omega \frac{\tilde{u}^2}{2}dx}_{\substack{=0 \text{ då } t=0 \\ \geq 0 \text{ då } t>0}}}_{\geq 0 \text{ för } t \text{ nära } 0} + \underbrace{\int_\Omega |\nabla\tilde{u}|^2 dx}_{\geq 0}$$

>0 ej möjligt!

Alltså $\tilde{u}$ deriverbar och konstant $\overset{(*)}{\Rightarrow} \tilde{u} = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$.

Ex. Neumann problemet

$$\begin{cases} -\Delta u = f & i\ \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} = 0 & på\ \partial\Omega \end{cases} \overset{\text{Lemma 1}}{\Longleftrightarrow} \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx = \int_\Omega f v\,dx$$

$\forall v \in H^1(\Omega)$, $v = 0$ på $\Gamma_D = \emptyset$

välj $v(x) = 1$

har en lösning om och endast om

$$\int_\Omega f\,dx = 0 \Leftarrow (f, 1) = 0.$$

Lösningarna är entydiga modulo en konstant, d v s om $u_1(x)$ är en lösning så är $u_2(x) = u_1(x) + C$ också en lösning för godtyckligt $C \in \mathbb{R}$.