Fredholm operatorn

$$Ku(x) = \int_a^b k(x,y)\,u(y)\,dy$$

har en symmetrisk kärna om

$$k(x,y) = \overline{k(y,x)} \quad \forall\,(x,y) \in [a,b]\times[a,b].$$

Vi betraktar K som en operator på $L^2(a,b)$.

Sats Om Fredholm operatorn $K : L^2(a,b) \to L^2(a,b)$ har en symmetrisk kärna så är K symmetrisk dvs

$$(Ku, v) = (u, Kv) \quad \forall\, v \in L^2(a,b).$$

Bevis.

$$(Ku,v) = \int_a^b \left(\int_a^b k(x,y)\,u(y)\,dy\right)\overline{v(x)}\,dx$$

$$= \int_a^b\int_a^b u(y)\,k(x,y)\,\overline{v(x)}\,dy\,dx$$

$$= \int_a^b\int_a^b u(y)\,k(x,y)\,\overline{v(x)}\,dx\,dy$$

$$= \int_a^b u(y)\Big(\int_a^b \underbrace{k(x,y)}_{=\overline{k(y,x)}}\overline{v(x)}\,dx\Big)dy = \int_a^b u(y)\,\overline{\int_a^b k(x,y)v(x)\,dx}\,dy$$

$$= (u, Kv) \qquad \text{v.s.v.}$$

Sats (Hilbert-Schmidt) Betrakta Fredholm-operatorn

$$Ku(x) = \int_a^b k(x,y)\,u(y)\,dy$$

Se definition på föreläsning F15 sid 2.

med symmetrisk, kontinuerlig och icke-separabel kärna. Då har K oändligt många egenvärden $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$Ku_n = \lambda_n u_n \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

som kan ordnas så att

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|, \qquad \lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = 0.$$

Varje egenrum $E_n = \{v \in L^2(a,b) : Kv = \lambda_n v\}$ har ändlig dimension, $\dim E_n < \infty$, och det finns en ON-bas av egenfunktioner $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ i $L^2(a,b)$. I synnerhet så konvergerar Fourierserien i $L^2(a,b)$

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n u_n, \qquad f_n = (f, u_n)$$

för varje $f \in L^2(a,b)$.

5.4.26 Bestäm egenvärden och egenfunktioner till

$$Ku(x) = \int_{-1}^{1} \underbrace{\big(1 - |x-y|\big)}_{=k(x,y)}\,u(y)\,dy, \qquad x \in [-1, 1]$$

$$Ku = \lambda u \;\Rightarrow\; \lambda u' = \int_{-1}^{1} \frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\big(1-|x-y|\big)}_{=\begin{cases}1-x+y & \text{om } 1 \le y < x\\ 1+x-y & \text{om } x \le y \le 1\end{cases}}u(y)\,dy$$

$$\lambda u'(x) = \int_{-1}^{x} -\underbrace{u(y)}_{\overset{\text{def}}{=} g'(y)}\,dy + \int_{x}^{1}\underbrace{u(y)}_{g'(y)}\,dy = -\big(g(x) - g(-1)\big) + \big(g(1) - g(x)\big) \qquad (1)$$

$$\lambda u'(x) = -2g(x) + g(-1) + g(1)$$

Differentialekvation

$$\lambda u'' = -2g'(x) = -2u(x) \qquad (2)$$

Randvillkor

$$Ku(-1) = \int_{-1}^{1}\big(1 - (y+1)\big)u(y)\,dy = -\int_{-1}^{1} y\,u(y)\,dy = -Ku(1), \text{ ty}$$

$$Ku(1) = \int_{-1}^{1}\big(1 - (1-y)\big)u(y)\,dy = \int_{-1}^{1} y\,u(y)\,dy$$

$$\lambda u(-1) = Ku(-1) = -Ku(1) = -\lambda u(1) \;\Rightarrow\; \lambda\big(u(-1) + u(1)\big) = 0 \qquad (3)$$

$$\lambda u'(-1) \overset{(1)}{=} \int_{-1}^{1} u(y)\,dy \;\Rightarrow\; \lambda\big(u'(-1) + u'(1)\big) = 0 \qquad (4)$$

$$\lambda u'(1) \overset{(1)}{=} -\int_{-1}^{1} u(y)\,dy$$

Alltså

$\omega = \pm\sqrt{\frac{2}{\lambda}}$ där negativt ω bara skulle ändra B

$$\begin{cases} -u'' = \frac{2}{\lambda}u & \text{Kar ekv: } \omega^2 = \frac{2}{\lambda} \Rightarrow u = A\cos\omega x + B\sin\omega x \qquad (5)\\ & \phantom{\text{Kar ekv: } \omega^2 = \frac{2}{\lambda} \Rightarrow}\ u' = -A\omega\sin\omega x + B\omega\cos\omega x \\ u(-1) + u(1) = 0 & (6) \\ u'(-1) + u'(1) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A\cos\omega - B\sin\omega + A\cos\omega + B\sin\omega = 0 \\ A\omega\sin\omega + B\omega\cos\omega - A\omega\sin\omega + B\omega\cos\omega = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2A\cos\omega = 0 \\ 2B\omega\cos\omega = 0 \end{cases} \quad \text{Icke-trivial lösning om} \quad \begin{vmatrix} \cos\omega & 0 \\ 0 & \omega\cos\omega \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \omega\cos^2\omega = 0$$

$$\Rightarrow \omega = 0 \text{ eller } \cos\omega = 0, \text{ men } \omega^2 \overset{(5)}{=} \frac{2}{\lambda} \neq 0.$$

Alltså $\cos\omega = 0 \Rightarrow \omega_n = \pi\cdot n + \frac{\pi}{2} = \frac{(2n+1)\pi}{2}$, $n \in \mathbb{N}$.

Svar: Egenvärden och egenfunktioner till K ges av

$$\begin{cases} \lambda_n \overset{(5)}{=} \dfrac{2}{\omega_n^2} = \dfrac{8}{(2n+1)^2\pi^2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \\ u_n(x) = \cos\left(\dfrac{(2n+1)\pi}{2}x\right) \\ v_n(x) = \sin\left(\dfrac{(2n+1)\pi}{2}x\right) \end{cases}$$

Inversen till en differentialoperator

Betrakta randvärdesproblemet

$$(*)\quad \begin{cases} Lu = f & (a<x<b) \\ \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0 \\ \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0 \end{cases}$$

där L är en Sturm-Liouville operator, dvs

$$Lu = -(pu')' + qu$$

Att lösa $(*)$ är ekvivalent med att invertera operatorn L, dvs

$$u = L^{-1} f$$

Om $L : C^2([a,b]) \to C([a,b])$

så förväntar vi oss att $L^{-1} : C([a,b]) \to C^2([a,b])$.

Det visar sig att L^{-1} är en integraloperator av Fredholm typ, dvs

$$u = L^{-1} f = Kf, \quad \text{där}$$

$$Kf(x) = \int_a^b g(x,y) f(y)\,dy$$

Kärnan $g(x,y)$ kallas för Greenfunktion.

Ex. Lös randvärdesproblemet
(stationär värmeledning)

$$\begin{cases} -u'' = f(x) & (0<x<1) \\ u(0) = u(1) = 0 & (\text{Dirichlet-villkor}) \end{cases}$$

och bestäm Greenfunktionen.

$$-u''(x) = f(x) \implies -u'(x) = \int_0^x f(y)\,dy + C \implies$$

$$\int_0^x -u'(z)\,dz = \int_0^x \left(\int_0^z f(y)\,dy + C \right) dz \implies$$

$$-(u(x) - \underbrace{u(0)}_{=0}) = \int_0^x 1 \cdot \left(\int_0^z f(y)\,dy \right) dz + Cx$$

$$-u(x) = \left[z \int_0^z f(y)\,dy \right]_{z=0}^{x} - \int_0^x z \cdot f(z)\,dz + Cx$$

$$= x \int_0^x f(y)\,dy - \int_0^x y \cdot f(y)\,dy + Cx$$

$$= \int_0^x (x-y) f(y)\,dy + Cx$$

$$u(1) = 0 \implies C = -\int_0^1 (1-y) f(y)\,dy \implies$$

$$u(x) = \int_0^x (y-x) f(y)\,dy + x \underbrace{\int_0^1 (1-y) f(y)\,dy}_{\int_0^x (1-y) f(y)\,dy + \int_x^1 (1-y) f(y)\,dy}$$

$$u(x) = \int_0^x \left(y - \cancel{x} + x(\cancel{1}-y) \right) f(y)\,dy + \int_x^1 x(1-y) f(y)\,dy$$

$$= \int_0^x y(1-x) f(y)\,dy + \int_x^1 x(1-y) f(y)\,dy$$

$$= \int_0^1 g(x,y) f(y)\,dy = Kf(x)$$

$$\text{där}\quad g(x,y) = \begin{cases} y(1-x), & \text{om } x>y \\ x(1-y) & \text{om } x<y \end{cases} \qquad \boxed{\text{Obs! } g(x,y) = g(y,x)}$$

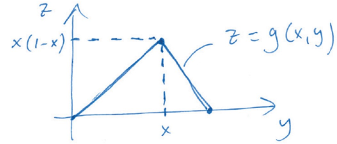
Detta visar att inversen till
$Lu = -u''$ med Dirichlet-villkor är

Greenfunktion

$$Kf(x) = \int_0^1 g(x,y) f(y)\,dy, \quad \text{dvs}$$

$$Lu = f \iff u = Kf$$

Greenfunktionens graf (för konstant x) är



Värmekälla i punkten $y = x$?

Kommentar: Heavisides funktion

$$g(x,y) = y(1-x)H(x-y) + x(1-y)H(y-x)$$