För stationär värmeledning

$$\begin{cases} -u'' = f(x), & 0<x<1 \\ u(0)=u(1)=0 \end{cases} \qquad (*)$$

har vi sett att lösningen kan skrivas som integralen

$$u(x) = Kf(x) = \int_0^1 g(x,y)\,f(y)\,dy \quad \text{med Greenfunktionen} \quad g(x,y) = \begin{cases} x(1-y) & \text{om } x<y, \\ y(1-x) & \text{om } x\geq y. \end{cases}$$

$$\begin{matrix} 0\leq y\leq 1 \\ 0\leq x\leq 1 \end{matrix} \qquad \boxed{\lim_{x\to y-} \frac{\partial}{\partial x} g(x,y) = \begin{cases} 1-y & \text{om } x<y \\ -y & \text{om } x\geq y \end{cases}}$$

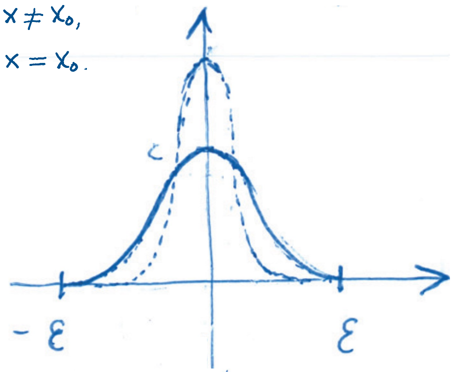
för vilken vi har

$$\frac{\partial}{\partial x} g(x,y) = \begin{cases} \overbrace{1-y}^{\geq 0} & \text{om } x<y \\ \underbrace{-y}_{\leq 0} & \text{om } x\geq y \end{cases} \quad \text{och} \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} g(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{om } x\neq y, \\ \text{odefinierad} & \text{om } x=y. \end{cases}$$

En idealiserad värmekälla i punkten $\overbrace{x=x_0}^{\text{med } 0<x_0<1}$ motsvaras av en Diracimpuls $f(x)=\delta(x-x_0)$ och

$$u''(x) = \int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} g(x,y)\,\delta(y-x_0)\,dy = \frac{\partial^2}{\partial x^2} g(x,x_0) = \begin{cases} 0 & \text{om } x\neq x_0, \\ \text{odefinierad} & \text{om } x=x_0. \end{cases}$$

I (*) förutsatte vi dock att u är två gånger deriverbar på $[0,1]$ och en verklig värmekälla är inte punktformad. Båda dessa problemen kommer man runt genom att approximera en punktformad värmekälla med en C_c^∞-funktion.



5.5.8 |

$$\begin{cases} (k(x)u')' = f(x) & (0<x<1) \\ u(0)=u(1)=0 \end{cases}$$

$$k(x)u' = \int_0^x f(y)dy + C \Rightarrow u' = \frac{1}{k(x)}\int_0^x f(y)dy + \frac{C}{k(x)}$$

$$\int_0^x u'(z)dz = \int_0^x \frac{1}{k(z)}\int_0^z f(y)dy + \frac{C}{k(z)}\,dz$$

$$u(x) - \underbrace{u(0)}_{=0} = \int_0^x \frac{1}{k(z)}\int_0^z f(y)dy\,dz + \left(\int_0^x \frac{dz}{k(z)}\right)C$$

Sätt $a(x) = \int_0^x \frac{dz}{k(z)} \Rightarrow a'(x) = \frac{1}{k(x)}$

$$u(x) = \underbrace{\int_0^x a'(z)\int_0^z f(y)dy\,dz}_{\left[a(z)\int_0^z f(y)dy\right]_{z=0}^{x} - \int_0^x a(z)f(z)dz} + a(x)C$$

$$= a(x)\int_0^x f(y)dy - \int_0^x a(y)f(y)dy + a(x)C$$

$$u(1)=0 \Rightarrow C = \left(\int_0^1 a(y)f(y)dy - a(1)\int_0^1 f(y)dy\right)/a(1)$$

$$u(x) = \int_0^x \big(a(x)-a(y)\big)f(y)dy + \frac{a(x)}{a(1)}\int_0^1 \big(a(y)-a(1)\big)f(y)dy$$

$$= \int_0^x \left(\cancel{a(x)} - a(y) + a(x)\left(\frac{a(y)}{a(1)} - \cancel{1}\right)\right)f(y)dy + \int_x^1 a(x)\left(\frac{a(y)}{a(1)}-1\right)f(y)dy$$

$$= \int_0^x a(y)\left(\frac{a(x)}{a(1)}-1\right)f(y)dy + \int_x^1 a(x)\left(\frac{a(y)}{a(1)}-1\right)f(y)dy$$

Greenfunktionen är alltså

$$g(x,y) = \begin{cases} a(y)\left(\frac{a(x)}{a(1)}-1\right) & \text{om } x>y \\ a(x)\left(\frac{a(y)}{a(1)}-1\right) & \text{om } x<y \end{cases}$$

där $a(x) = \int_0^x \frac{1}{k(z)}dz$.

Lösningen kan uttryckas

$$u(x) = \int_0^1 g(x,y)f(y)dy = Kf(x)$$

F15 Greenfunktionen uttryckt i egenfunktioner (Avsnitt 5.5.3)

den 20 augusti 2020 07:53

Betrakta randvärdesproblemet

$$\begin{cases} Lu = f & (a<x<b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

(i) Om L är inverterbar så finns det en Greenfunktion s.a.

$$u(x) = L^{-1}f(x) = \int_a^b g(x,y) f(y)\,dy$$

(ii) Om L har en ON-bas $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ av egenfunktioner

$$\begin{cases} L\psi_n = \lambda_n \psi_n & (n=1,2,\dots) \\ \psi_n(a) = \psi_n(b) = 0 \end{cases}$$

$$(f,\psi_n) = (Lu,\psi_n) = \Big(L\sum_{k=1}^{\infty} c_k\psi_k, \psi_n\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (\underbrace{L\psi_k}_{=\lambda_k\psi_k}, \psi_n) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\lambda_k \underbrace{(\psi_k,\psi_n)}_{=\delta_{k,n}}$$

$$(f,\psi_n) = c_n\lambda_n$$

så kan u uttryckas

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\psi_n(x), \quad \text{där } c_n = \frac{(f,\psi_n)}{\lambda_n} \Rightarrow$$

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}\int_a^b f(y)\psi_n(y)\,dy\ \psi_n(x)$$

$$= \int_a^b \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(x)\psi_n(y)}{\lambda_n}\Big) f(y)\,dy$$

Av detta drar vi slutsatsen att Greenfunktionen kan uttryckas som

$$\boxed{g(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(x)\psi_n(y)}{\lambda_n}} \quad \text{(bilinjär expansion)}$$

Separabel kärna

Integraloperatorn

$$Ku(x) = \int_a^b k(x,y)\,u(y)\,dy$$

sägs ha en separabel kärna om

$$k(x,y) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x)\beta_j(y)$$

Sats Om integraloperatorn K har separabel kärna så är integralekvationen

$$Ku - \lambda u = f$$

ekvivalent med det linjära ekv. systemet

$$(*) \quad Ac - \lambda c = g \iff \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j - \lambda c_i = g_i \quad (i=1,\dots,n)$$

där $a_{ij} = (\alpha_j,\beta_i)$, $c_i = (u,\beta_i)$, $g_i = (f,\beta_i)$

skalärprodukt i $L^2(a,b)$

Bevis. $Ku - \lambda u = f \Rightarrow$

$$\int_a^b \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x)\beta_j(y)u(y)\,dy - \lambda u(x) = f(x) \Rightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x) \underbrace{\int_a^b \beta_j(y)u(y)\,dy}_{c_j} - \lambda u(x) = f(x)$$

$$\int_a^b \beta_i(x)\Big(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(x)c_j - \lambda u(x)\Big)dx = \int_a^b \beta_i(x)f(x)\,dx$$

$$\sum_{j=1}^{n}\underbrace{\Big(\int_a^b \beta_i(x)\alpha_j(x)\,dx\Big)}c_j - \lambda\underbrace{\int_a^b \beta_i(x)u(x)\,dx}_{c_i} = \int_a^b \beta_i(x)f(x)\,dx$$

$$\sum_{j=1}^{n} (\beta_i,\alpha_j)c_j - \lambda c_i = (\beta_i, f) \iff$$

$$\boxed{Ac - \lambda c = g} \quad \text{v.s.v.}$$