F16 Fredholms alternativ, sid 1

$Ac - \lambda c = g \quad (*)$

den 20 augusti 2020 14:26

Sats (Fredholms alternativ) Theorem 5.44; Logan

(i) Om λ inte är ett egenvärde till A så har ekv. $(*)$ en entydig lösning för varje $g \in \mathbb{R}^n$.

(ii) Om λ är ett egenvärde så saknar $(*)$ en lösning eller så har $(*)$ oändligt många lösningar. g lösning till $(*)$ $\Leftrightarrow$ g ortogonal mot egenrummet E_λ

3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$(2-\lambda)(3-\lambda) - 2 = 0 \Rightarrow 6 - 5\lambda + \lambda^2 - 2 = 0$

$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{16}{4}} = \frac{5 \pm 3}{2}$

$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 1.$

$(A - 4I)u = b \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & b_1 \\ 1 & -1 & b_2 \end{array}\right) \sim$

$\begin{array}{cc} u_1 & u_2 \end{array}$
$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & b_1 + 2b_2 \\ 1 & -1 & b_2 \end{array}\right) \Rightarrow$ Lösbart om $b_1 + 2b_2 = 0 \Rightarrow b = t\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$(A - 4I)u = b$ har oändligt många lösningar om $b \in \operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$, i annat fall saknas lösning.

Ex. a) Bestäm egenvärden till

$Ku(x) = \int_0^\pi \sin x \sin y \, u(y)\,dy$

$Ku - \lambda u = 0 \Leftrightarrow$

$(*)$ $\sin x \underbrace{\int_0^\pi \sin y \, u(y)\,dy}_{c} - \lambda u(x) = 0 \Rightarrow$

$\int_0^\pi \sin^2 x \cdot c - \lambda \sin x \, u(x)\,dx = 0 \Rightarrow$

$\frac{\pi}{2} \cdot c - \lambda c = 0 \Rightarrow \left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right)c = 0 \Rightarrow$

SVAR! $\boxed{\lambda = \frac{\pi}{2}}$

5.4.5 (c). $Ku(x) = \int_0^\pi k(x,y)\,u(y)\,dy$ (1)

$k(x,y) = \begin{cases} y(\pi - x) & \text{om } x > y \\ x(\pi - y) & \text{om } x < y \end{cases}$ (2)

Bestäm egenvärden och egenfunktioner

$Ku - \lambda u = 0$ (3) $\Rightarrow$

$\lambda u'(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\pi k(x,y)\,u(y)\,dy = \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial x} k(x,y)\,u(y)\,dy$

$= \int_0^x y \cdot (-1)\,u(y)\,dy + \int_x^\pi (\pi - y)\,u(y)\,dy$

$= -\int_0^x \underbrace{y\,u(y)}_{g'(y)}\,dy + \int_x^\pi \underbrace{(\pi - y)\,u(y)}_{h'(y)}\,dy$

$= -\left(g(x) - g(0)\right) + \left(h(\pi) - h(x)\right) \Rightarrow$

$\lambda u''(x) = -g'(x) - h'(x)$

$= -\cancel{x\,u(x)} - (\pi - \cancel{x})\,u(x) = -\pi u(x)$

$\omega = \pm\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} > 0$ (4)

$\Rightarrow -u''(x) = \frac{\pi}{\lambda} u(x), \quad \omega^2 = \frac{\pi}{\lambda} \Rightarrow$ (5)

$u(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$

(1),(2) $\Rightarrow Ku(0) = Ku(\pi) = 0 \overset{(3)}{\Rightarrow} u(0) = u(\pi) = 0$

$u(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \overset{u(\pi)=0}{\Rightarrow} \sin(\omega\pi) = 0 \overset{(4)}{\Rightarrow} \omega\pi = \pi n \Rightarrow \boxed{\omega = n \in \mathbb{Z}_+}$

$\lambda \overset{(5)}{=} \frac{\pi}{n^2} \quad (n = 1, 2, \ldots)$

Svar: $\begin{cases} \lambda_n = \frac{\pi}{n^2} & (n = 1, 2, \ldots) \\ u_n(x) = \sin(nx) \end{cases}$

F16 Fredholms alternativ, sid 2

den 20 augusti 2020 19:33

5.4.181 Lös ekv.

$$\underbrace{\int_0^1 e^{x+y} u(y)\,dy}_{\stackrel{\text{def}}{=} Ku(x)} - \lambda u(x) = f(x)$$

Egenvärdesproblemet:

$$Ku - \lambda u = 0 \Rightarrow e^x \underbrace{\int_0^1 e^y u(y)\,dy}_{c} - \lambda u(x) = 0 \quad (6)$$

$$\Rightarrow \quad c e^x - \lambda u(x) = 0 \Rightarrow \int_0^1 e^x \cdot (c e^x - \lambda u(x))\,dx = 0$$

$$\left(\int_0^1 e^{2x}\,dx\right) c - \lambda \int_0^1 e^x u(x)\,dx = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{e^2-1}{2} \cdot c - \lambda c = 0 \Rightarrow \left(\frac{e^2-1}{2} - \lambda\right) c = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{e^2-1}{2} \quad \text{eller} \quad c = 0 \Rightarrow \int_0^1 e^x u(x)\,dx = 0 \quad \stackrel{(6)}{\Rightarrow} \lambda = 0$$

Egenvärden: $\lambda_1 = \frac{e^2-1}{2}$ eller $\lambda_2 = 0$

$$E_1 = \text{Span}\{e^x\}$$

$$E_2 = E_1^{\perp} = \{u \in L^2(0,1) : (u, e^x) = 0\}.$$

Fredholms alternativ:

(i) Om $\lambda \neq 0$ och $\lambda \neq \frac{e^2-1}{2}$ så har $Ku - \lambda u = f$ en unik lösning för varje f i $L^2(0,1)$.

$$Ku - \lambda u = f \Rightarrow e^x \int_0^1 e^y u(y)\,dy - \lambda u(x) = f(x)$$

$$e^x \cdot c - \lambda u(x) = f(x) \quad (7) \Rightarrow$$

$$\int_0^1 e^x \cdot (e^x \cdot c - \lambda u(x))\,dx = \int_0^1 e^x \cdot f(x)\,dx \Rightarrow$$

$$\frac{e^2-1}{2} \cdot c - \lambda \cdot c = (f, e^x) \Rightarrow c = \frac{(f, e^x)}{\frac{e^2-1}{2} - \lambda}$$

$$\stackrel{(7)}{\Rightarrow} \boxed{u(x) = \frac{c e^x - f(x)}{\lambda}}$$

(ii) Om $\lambda = \frac{e^2-1}{2}$ så har $Ku - \lambda u = f$ oändligt många lösningar om $(f, e^x) = 0$. Om $u_1(x)$ är en lösning så är $u_2(x) = u_1(x) + C \cdot e^x$ en lösning för varje $C \in \mathbb{R}$. I annat fall saknas lösning.

(iii) Om $\lambda = 0$ så har $Ku - \lambda u = f$ oändligt många lösningar om $(f, v) = 0 \ \forall v \in E_2 \Rightarrow f \in E_1 \Leftrightarrow f(x) = C \cdot e^x$. I annat fall saknas lösning.