Lektion 1, genomgång

Går ej genom allt som behövs för alla uppgifter. Ni förutsätts före varje lektion läsa in det som rekommenderas på föregående lektions lektionsblad. Liten kompletterande genomgång på varje lektion och för den som vill ha mer så finns inspelade sådana i kursens Canvasrum.

I kurens Canvas-rum: Miniräknartips, svar till uppgifter som ej finns i boken samt lösnigsförslag till vissa uppgifter.

<u>Ex</u>: 5 trasiga och 6 hela muttrar i en låda.

- På hur många sätt kan vi välja 4 muttrar ur lådan?

<u>Med hänsyn till ordning</u>: Vi kan välja första på 11 sätt
andra på 10 sätt
tredje på 9 sätt
fjärde på 8 sätt

Totalt $11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 7920$ sätt

Utan hänsyn till ordning: I valet ovan kommer varje val av muttrar med $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$ gånger (en gång för varje sätt man kan kasta om ordningen på den. Antal val utan hänsyn till ordning är då

$$\frac{11 \cdot 10 \cdot \overset{3}{\cancel{9}} \cdot \cancel{8}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 11 \cdot 10 \cdot 3 = 330 \text{ sätt}$$

Binomialkoefficient:

$$\binom{11}{4} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{11!}{4!\,(11-4)!}$$

$$= 11 \boxed{nCr}\, 4 = \text{nchoosek}(11,4)$$

Matlab

På många miniräknare
nCr = "n choose r"

- Vad är sannolikheten att välja två hela och två trasiga muttrar?

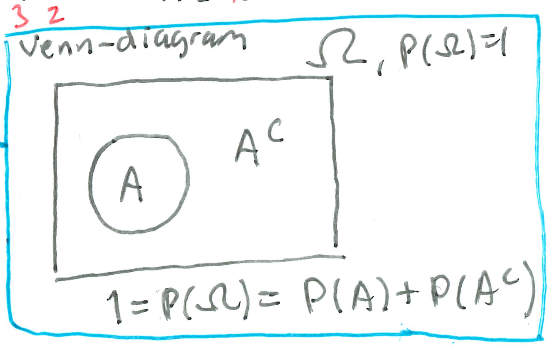
$$P(\text{två hela, två trasiga}) = \frac{g}{m} = \frac{\binom{6}{2} \cdot \binom{5}{2}}{\binom{11}{4}} = \frac{\frac{6 \cdot 5}{1 \cdot \cancel{2}} \cdot \frac{5 \cdot \cancel{4}}{1 \cdot \cancel{2}}}{11 \cdot 10 \cdot 3} = \frac{\overset{2}{\cancel{6}} \cdot 5 \cdot \cancel{5}}{11 \cdot \cancel{10} \cdot \underset{2}{\cancel{3}}} = \frac{5}{11}$$

- $$P(\text{först två hela, sedan två trasiga}) = \frac{g}{m} = \frac{\cancel{6} \cdot \overset{2}{\cancel{5}} \cdot 5 \cdot \cancel{4}}{11 \cdot \underset{2}{\cancel{10}} \cdot \underset{3}{9} \cdot \underset{2}{\cancel{8}}} = \frac{\cancel{2} \cdot 5}{11 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cancel{2}} = \frac{5}{66} \approx 0{,}0758$$

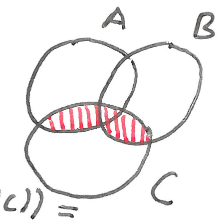
dvs 1, 2, 3 el. 4 st, $\Omega = \{\overset{A^c}{0}, \underset{A}{1, 2, 3, 4}\}$

- P(minst en hel mutter) = 1 − P(ingen hel mutter) =

$$= 1 - \frac{\binom{6}{0} \cdot \binom{5}{4}}{\binom{11}{4}} = 1 - \frac{5}{330} = \frac{325}{330} \approx 0{,}9848$$



Genomgång Lektion 2, betingad sannolikhet



$$P((A\cup B)\cup C) = P(A\cup B) + P(C) - P((A\cup B)\cap C)$$

$$= P(A)+P(B)-P(A\cap B)+P(C) - P((A\cap C)\cup(B\cap C)) =$$

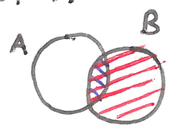
$$= P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-\big(P(A\cap C)+P(B\cap C)-P((A\cap C)\cap(B\cap C))\big) =$$

$$= \underbrace{P(A)+P(B)+P(C)}_{P(A\cap B\cap C)\times 3} - \underbrace{P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)}_{P(A\cap B\cap C)\times 3} + P(A\cap B\cap C)$$

Kan även fås från areatolkning. Börja med $P(A)+P(B)+P(C)$, subtrahera bort snitten mellan två av mängderna (som kommit med två gånger) och korrigera slutligen för $P(A\cap B\cap C)$.

$P(A\mid B)$ = betingade sannolikheten förhändelsen A givet att B har inträffat

$$= \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$



Rimlig definition som "relativa arean" vid areatolkning.

Från $\boxed{P(A\mid B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}}$ fås även att

$$\boxed{P(A\cap B) = P(B)\cdot P(A\mid B)}$$

Ex: Slumpvis vald bil från bilverkstad,

A: Trasig AC

B: Volvo

Om $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}7$ och $P(A\mid B) = 0{,}1$, vad är då

a) $P(A\cap B)$?

b) $P(B\mid A)$?

a) $P(A\cap B) = P(B)\cdot P(A\mid B) = 0{,}7\cdot 0{,}1 = \underline{\underline{0{,}07}}$

b) $P(B\mid A) = \dfrac{P(B\cap A)}{P(A)} = \dfrac{0{,}07}{0{,}5} = \underline{\underline{0{,}14}}$

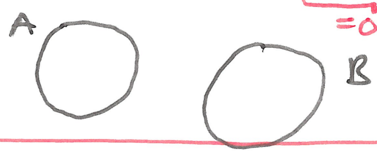
Genomgång Lektion 3: Disjunkta händelser, oberoende händelser

Två nya begrepp:

Bokens "...inträffa samtidigt" farligt. T.ex två kast med tärning. Händelserna "etta kast 1" och "etta kast 2" sker ej samtidigt men är ej disjunkta.

A, B disjunkta $\Leftrightarrow P(A \cap B) = 0 \Leftrightarrow$ A och B kan ej båda inträffa

$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \underbrace{P(A \cap B)}_{=0} = P(A) + P(B)$



A, B oberoende $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B) \cdot \cancel{P(A)}}{\cancel{P(A)}} = P(B)$$

och på samma sätt

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot \cancel{P(B)}}{\cancel{P(B)}} = P(A),$$

dvs oberoende i meningen att information om att A inträffat ej påverkar sannolikheten att B inträffar (och omvänt).

Även för flera: $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ oberoende $\Leftrightarrow P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$

Ex: Tärningskast

En tärning kastas 23 gånger.

A_n: Kast nummer n blir en etta. Oberoende händelser.

$P(A_n) = \frac{1}{6}$, $P(A_n^c) = \frac{5}{6}$

P(Första ettan kommer kast nummer 23) =

$= P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap \cdots \cap A_{21}^c \cap A_{22}^c \cap A_{23}) =$

$= P(A_1^c) \cdot P(A_2^c) \cdot P(A_3^c) \cdot \ldots \cdot P(A_{21}^c) \cdot P(A_{22}^c) \cdot P(A_{23}) = \left(\frac{5}{6}\right)^{22} \cdot \frac{1}{6} \approx 0{,}0030$

Ex: Vad är sannolikheten att tre kast av 23 ger en etta?

Antal möjliga kastserier med tre ettor är

$$\binom{23}{3} = \frac{23 \cdot \overset{11}{\cancel{22}} \cdot \overset{7}{\cancel{21}}}{1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3}} = 23 \cdot 77 = 1771$$

Varje sådan kastserie har sannolikhet $\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{20}$ och de är disjunkta, så summering av sannolikheterna ger att

$$P(\text{exakt tre ettor}) = \binom{23}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{20} \approx \underline{\underline{0{,}2139}}$$

Mer generellt i boken sid 66:

- n oberoende upprepningar av något försök
- Vid upprepning nr m sker antingen en händelse A_m eller A_m^c
- $P(A_m) = p$

$P(\text{vid exakt } k \text{ försök sker } A_m) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

(2016)

L4 Diskreta stokastiska variabler

Stokastisk variabel = slumpvariabel med okänt värde.

Grekiska bokstäver, som $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ (tabell sid 301)

Kallas diskret om den bara kan anta ändligt eller numrerbart många värden $x_1, x_2, x_3, \ldots$ $(, x_n)$

(Latinska bokstäver för möjliga eller observerade värden.)

För en diskret stokastisk variabel med möjliga värden $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$ definieras sannolikhetsfunktionen

$$p(x_k) = P(\xi = x_k)$$

och fördelningsfunktionen

$$F(x_k) = P(\xi \leq x_k) = \sum_{i=1}^{k} P(\xi = x_i)$$

Ex: ξ = antal sexor vid fem tärningskast

Möjliga värden: $0, 1, 2, 3, 4, 5$

Sannolikhetsfunktion: $p(x) = P(\xi = x) = \binom{5}{x} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^x \left(\frac{5}{6}\right)^{5-x}$, $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

Binomialfördelning, $\xi \in Bin(n, p)$

- n oberoende variabler ξ_k (t ex upprepningar av försök)
- samma sannolikhet $p = P(\xi_k = A)$ för alla k
- ξ = antal gånger A inträffar

$$P(\xi = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

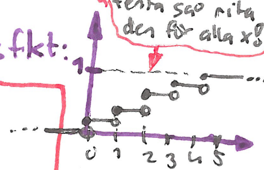
Jämför!

OBS! Om diagram för fördelningsfunktion efterfrågas på tentan så rita den för alla x!

Tabell

x					
$P(\xi=x)$					

$\Rightarrow$ Stapeldiagram som på sidan 84. $\Rightarrow$ Diagram Fördelningsfkt:



Ex: **Hypergeometrisk fördelning, $\xi \in Hyp(N, n, p)$**

- N element, varav Np av ett speciellt slag
- Välj slumpartat n element utan återläggning. (olika sannolikhet för varje nytt val!)
- ξ = antal valda element av det speciella slaget.

$$P(\xi = x) = \frac{\binom{Np}{x} \binom{N(1-p)}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, \min(n, Np)$$

Ex: Poissonfördelning, $\xi \in Po(\lambda)$ (t ex radioaktivt sönderfall)

- Händelser A som inträffar slumpmässigt och oberoende
- ξ = antal händelser A som inträffar under ett tidsintervall av given längd.

Man kan visa att $P(\xi = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$, $x = 0, 1, 2, \ldots$

Ex: Likformig fördelning (t ex tärningskast, slantsingling)

Situation med N lika sannolika utfall. Numrera dem från 1 till N och låt ξ = utfallets ordningsnummer

$P(\xi = x) = \frac{1}{N}$, $x = 1, 2, 3, \ldots, N$.

TABELLER

- För $x \in Po(\lambda)$ finns tabell på sid 307 för $P(\xi \leq x)$.
  Om t ex $\lambda = 0{,}3$ så kan man avläsa på rad 3, kolumn 3 att $P(\xi \leq 2) \approx 0{,}9964$. $(= P(\xi=0) + P(\xi=1) + P(\xi=2))$

  (Kan annars räknas ut som $P(\xi=0) + P(\xi=1) + P(\xi=2)$ från formeln ovan.)

- För $\xi \in Bin(n,p)$ finns tabell på sid 302 för $P(\xi \leq x)$.
  Om t ex $\xi \in Bin(9, 0.05)$ så kan man avläsa att
  $P(\xi > 3) = 1 - P(\xi \leq 3) = 1 - 0.9994 = 0.0006$ $(= 1 - (P(\xi=0) + P(\xi=1) + P(\xi=2) + P(\xi=3)))$
  på rad 4, kolumn 1 i tabellen på sid 303.

(2016)

L5 Approximationer, varians och standardavvikelse

Approximationer sid 87, Figur 37.

Ex: $\xi \in Bin(70, 0.03)$ (Tabell sid 302−306 endast för $n \lesssim 20$)

$P(\xi \leq 3) = ?$

Vi har $n = 70 > 10$, $p = 0{,}03 < 0{,}1$, så approximativt gäller att

$\xi \in Po(n \cdot p) = Po(2.1)$

$P(\xi \leq 3) \approx 0.83825 \approx \underline{\underline{0.83}}$ (Medelvärde av tabellvärden för $\lambda = 2.0$ och $\lambda = 2.2$, sid 307.)

Väntevärde $E(\xi)$ (Förväntat medelvärde vid stort antal observationer.)

ξ diskret stokastisk variabel som kan anta värdena $x_1, x_2, x_3, \ldots (, x_n)$

$\mu = E(\xi) = x_1 \cdot P(\xi = x_1) + x_2 \cdot P(\xi = x_2) + \cdots = \sum_i x_i P(\xi = x_i)$ (= "masscentrum")

Varians $V(\xi)$ och standardavvikelse $\sigma = \sqrt{V(\xi)}$

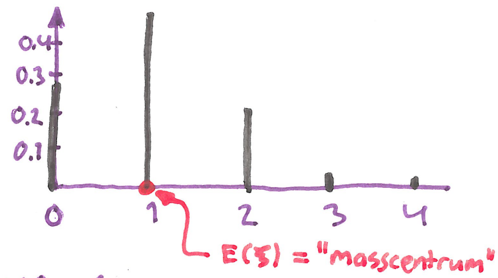
För ξ som ovan är variansen

$V(\xi) = E((\xi - \mu)^2) = \sum_i (x_i - \mu)^2 P(\xi = x_i)$

Ex: För $\xi \in Hyp(20, 5, 0.2)$ visas på sid 74 att

x	0	1	2	3	4
$P(\xi = x)$	0.2817	0.4696	0.2167	0.0310	0.0010

Sannolikaste värdet!



$E(\xi) = 0 \cdot 0{,}2817 + 1 \cdot 0{,}4696 + 2 \cdot 0.2167 + 3 \cdot 0{,}0310 + 4 \cdot 0{,}0010 = 1$

$V(\xi) = (0-1)^2 \cdot 0.2817 + (1-1)^2 \cdot (0.4696) + (2-1)^2 \cdot 0{,}2167 + (3-1)^2 \cdot 0{,}0310 + (4-1)^2 \cdot 0{,}0010$

$V(\xi) = 0.6314$ (approximativt, ty avrundade värden i tabellen)

$\sigma \approx 0{,}7946$

Se även formelsamlingen sid 1 för $Hyp(N, n, p)$

$E(\xi) = np = 5 \cdot 0.2 = 1$

$V(\xi) = \frac{N-n}{N-1} \underbrace{np}_{=1} (1-p) = \frac{20-5}{19} \cdot 1 \cdot 0.8 \approx 0{,}6316$

Genomgång lektion 6, kontinuerliga fördelningar

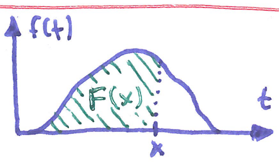
ξ kallas en kontinuerlig stokastisk variabel om det finns en funktion f sådan att

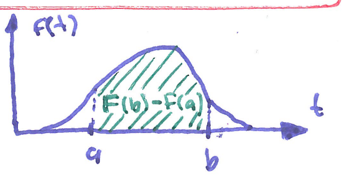
$$P(\xi \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt \quad , \quad f(x) \geq 0 \text{ för alla } x$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$$

f kallas då frekvensfunktion, och vi definierar fördelningsfunktionen $F(x) = P(\xi \leq x) = \int_{0}^{x} f(t)dt$

Som primitiv funktion:

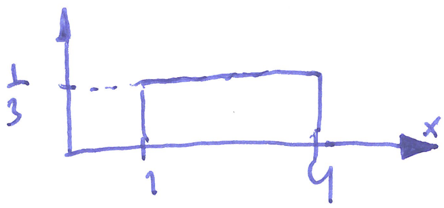




Detta ger att

$$\boxed{P(a \leq \xi \leq b) = \int_{a}^{b} f(t)dt = F(b) - F(a).}$$

Ex: Rektangelfördelning: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & 1 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$



$$P(2 \leq \xi \leq 3) = \int_{2}^{3} \frac{1}{3}\, dx = \left[\frac{x}{3}\right]_{2}^{3} = \frac{3}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Ex: Exponentialfördelning $\xi \in Exp(\lambda)$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases}$$

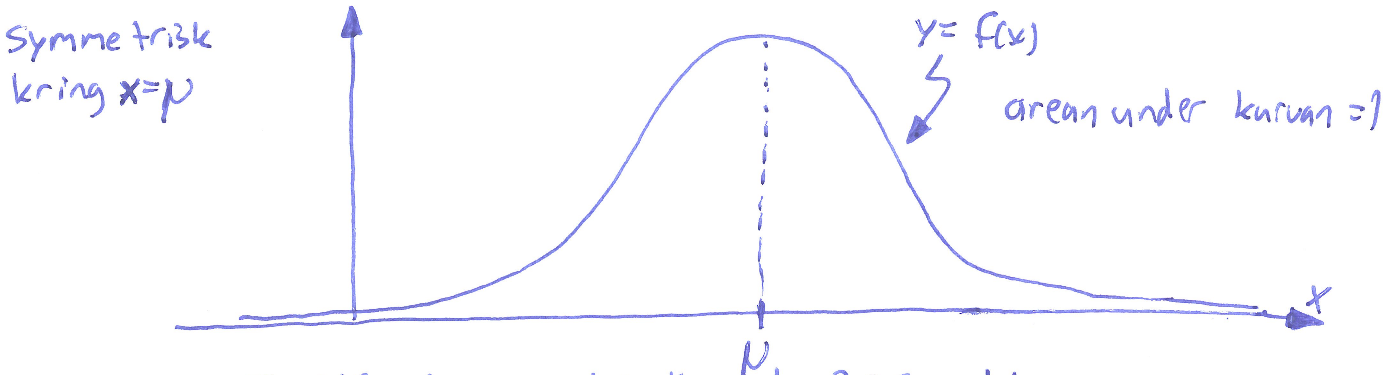
$$P(\xi \geq 7) = 1 - P(\xi < 7) = 1 - F(7) = 1 - (1 - e^{-\lambda 7}) = e^{-\lambda 7}.$$

Normalfördelning: $\xi \in N(\mu, \sigma)$

ξ kallas normalfördelad med väntevärde μ och standardavvikelse σ om den har frekvensfunktion (skrivs $\xi \in N(\mu,\sigma)$)

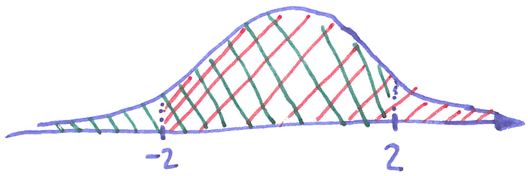
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Ingen enkel formel för Fördelningsfunktionen, men för $N(0,1)$ finns den i tabell sid 309. Kallas där $\Phi(x)$.



Ex: För $\xi \in N(0,1)$ ger tabell sid 309 att

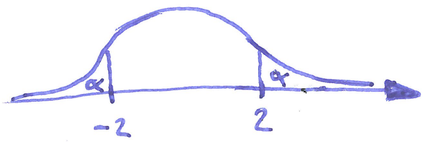
$$P(\xi < 3) = P(\xi \leq 3) = \Phi(3) \approx 0{,}9987$$



$$P(\xi \geq -2) = P(\xi \leq 2) = \Phi(2) \approx 0{,}9772$$

$$P(-2 \leq \xi < 1) = \Phi(1) - \Phi(-2) = \Phi(1) - (1 - \Phi(2))$$

$$\approx 0{,}8413 - (1 - 0{,}9772) = 0{,}8185$$



$P(\xi \leq -2) = P(\xi \geq 2) =$
$= 1 - P(\xi < 2) =$
$= 1 - \Phi(2)$

Tabell sid 310 ger att

$$P(\xi > a) = 0{,}005 \Rightarrow a \approx 2{,}5758$$

Kommer senare lektion men användbar redan nu:

SATS 6A, sid 156

$$\boxed{\xi \in N(\mu,\sigma) \Rightarrow \eta = \frac{\xi - \mu}{\sigma} \in N(0,1)} \Leftrightarrow \text{SATS 4B sid 118}$$

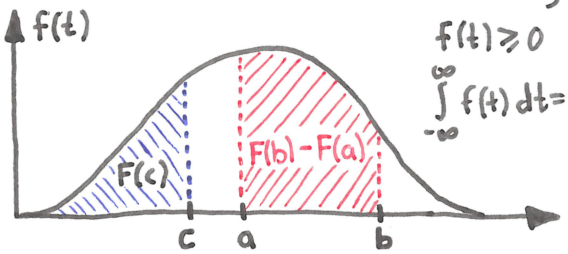
Bara olika formulering, men lättare att räkna med sats 6A.

Ex: $\xi \in N(2,3)$

$$P(\xi \leq 3{,}5) = P\Big(\underbrace{\frac{\xi-2}{3}}_{=\eta \in N(0,1)} \leq \frac{3{,}5-2}{3}\Big) = P(\eta \leq 0{,}5) \approx 0{,}6915$$

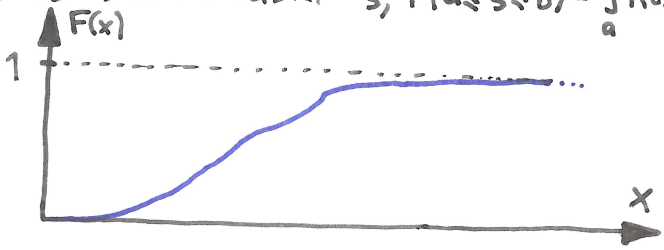
Genomgång Lektion 7

Förra lektionen: Kontinuerliga stokastiska variabler ξ, $P(a \leq \xi \leq b) = \int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$



$f(t) \geq 0$

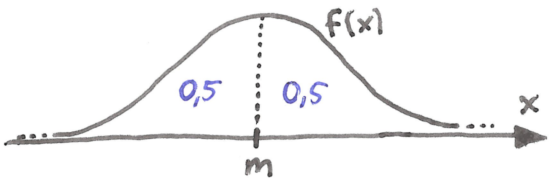
$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 1$

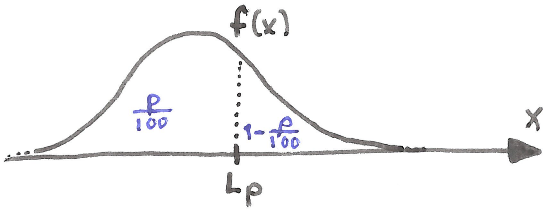


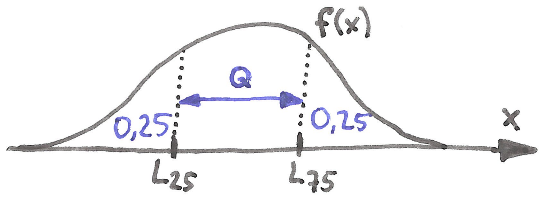
På labben: Observerat stickprov av variabel med okänd frekvensfunktion $f(x)$
Histogram ger approximation av $f(x)$ (bättre approximation för större stickprov)
Medianen = "mittersta värdet"

Liknande definitioner av median etc för $f(x)$:

För ξ med fördelningsfunktion $F(x)$ är medianen det tal m som uppfyller $F(m) = 0,5$ och p:te percentilen för ξ $(0 < p < 100)$ är det tal L_p som uppfyller $\boxed{F(L_p) = \frac{p}{100}}$. Kvartilavståndet definieras som $\boxed{Q = L_{75} - L_{25}}$.







②

Väntevärde

$$\mu = E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx$$

(motsvarar $\sum_n x_n P(\xi = x_n)$ för diskret fördelning)

Varians

Sats 4C sid 126

$$V(\xi) = E((\xi-\mu)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\, dx = E(\xi^2) - \mu^2$$

där $E(\xi^2) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx & \text{om } \xi \text{ är kontinuerlig} \\ \sum_i x_i^2 P(\xi = x_i) & \text{om } \xi \text{ är diskret.} \end{cases}$

Standardavvikelse $\sigma = \sqrt{V(\xi)}$

Ex: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{72}, & 0 < x < 6 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx = \int_0^6 \frac{x^3}{72}\, dx = \frac{1}{72}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^6 = \frac{1}{72} \cdot \left(\frac{6^4}{4} - 0\right) = \frac{18}{4} = \frac{9}{2} = \underline{\underline{4,5}}$$

$$E(\xi^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx = \int_0^6 \frac{x^4}{72}\, dx = \frac{1}{72}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^6 = \frac{6^5}{72 \cdot 5} = 21,6$$

$$V(\xi) = E(\xi^2) - E(\xi)^2 = 21,6 - 4,5^2 = \underline{\underline{1,35}}$$

$$\sigma = \sqrt{1,35} \approx \underline{\underline{1,1619}}$$

Genomgång Lektion 8

Sats 5A

a, b konstanter, ξ (xi), η (Eta) stokastiska variabler

a) $E(a\xi+b) = aE(\xi)+b$

b) $V(a\xi+b) = a^2V(\xi)$

c) $E(\xi+\eta) = E(\xi)+E(\eta)$

d) $V(\xi+\eta) = V(\xi)+V(\eta)$ om ξ och η är oberoende.

- Rimligt att förflyttning av $y=f(x)$ b längdenheter åt höger ej påverkar spridningsmått som standardavvikelse.
- Kvadrering rimlig ty $V(a\xi) = E((a\xi)^2) - (E(a\xi))^2 = a^2(E(\xi^2)-(E(\xi))^2) = a^2V(\xi)$

Om ξ, η är beroende så kan $V(\xi+\eta)$ bli lite vad som helst.

Ex: $V(\xi+\xi) = V(2\xi) \overset{b)}{=} 4\cdot V(\xi)$ men $V(\xi)+V(\xi) = 2V(\xi)$. Olika!

$V(\xi+(-\xi)) = V(0) \overset{b)}{=} 0$ men $V(\xi)+V(-\xi) \overset{b)}{=} V(\xi)+(-1)^2V(\xi) = 2V(\xi)$. Olika!

För $\eta = \pm\xi$ får vi alltså att $V(\xi+\eta) \neq V(\xi)+V(\eta)$, dvs d) gäller inte.

Motsvarande räkneregler gäller även för flera variabler.

Ex. ξ_1, ξ_2, ξ_3 oberoende stokastiska variabler med $E(\xi_k)=3$ och $V(\xi_k)=2$.

Låt $\eta = \frac{\xi_1+\xi_2+\xi_3}{3} = \frac{1}{3}\xi_1 + \frac{1}{3}\xi_2 + \frac{1}{3}\xi_3$ (medelvärdet)

Då är $E(\eta) = E(\frac{1}{3}\xi_1 + \frac{1}{3}\xi_2 + \frac{1}{3}\xi_3) = \frac{1}{3}E(\xi_1)+\frac{1}{3}E(\xi_2)+\frac{1}{3}E(\xi_3) =$

$= \frac{1}{3}(3+3+3) = \frac{9}{3} = 3$ $(=E(\xi_k))$

$V(\eta) = V(\frac{1}{3}\xi_1 + \frac{1}{3}\xi_2 + \frac{1}{3}\xi_3) = \frac{1}{9}V(\xi_1) + \frac{1}{9}V(\xi_2) + \frac{1}{9}V(\xi_3) =$

$= \frac{1}{9}(2+2+2) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} = \frac{1}{3}V(\xi_k)$

Detta är specialfall av

Sats 5C

Om $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ är oberoende stokastiska variabler med $E(\xi_k) = \mu$ och $V(\xi_k) = \sigma^2$,
och om $\bar{\xi} = \frac{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$ = medelvärdet, då är

$$E(\bar{\xi}) = \mu \quad \text{och} \quad V(\bar{\xi}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Sats 4B sid 118

$\Updownarrow$

SATS 6A sid 156

Om $\xi \in N(\mu, \sigma)$ och $\eta = \frac{\xi - \mu}{\sigma}$ så är $\eta \in N(0,1)$

Sats 4B fås då på följande sätt:

$$P(\xi \leq x) = P\Big(\underbrace{\frac{\xi - \mu}{\sigma}}_{=\eta \in N(0,1)} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\Big) = \Phi\Big(\frac{x-\mu}{\sigma}\Big)$$

I några utdelade uppgifter kan man räkna på följande sätt:

$$P(\mu - 3\sigma < \xi < \mu + 7\sigma) = P\Big(\frac{\cancel{\mu} - 3\sigma \cancel{-\mu}}{\sigma} < \underbrace{\frac{\xi - \mu}{\sigma}}_{=\eta \in N(0,1)} < \frac{\cancel{\mu} + 7\sigma \cancel{-\mu}}{\sigma}\Big) =$$

$$= P(-3 < \eta < 7) = \Phi(7) - \Phi(-3) = \Phi(7) - (1 - \Phi(3)) = \Phi(7) + \Phi(3) - 1$$

$$\approx \cancel{1.0000} + 0.9987 \cancel{-1} \approx 0.9987$$

Tabellen på sid 309 slutar vid $x = 3.69$ eftersom avrundning till fyra decimaler ger $\Phi(x) \approx 1.0000$ för $x \gtrsim 3.6$

Genomgång Lektion 9

Sats 6C

Om $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ är oberoende och $\xi_k \in N(\mu_k, \sigma_k)$ så gäller för konstanter c_k att

$$c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \dots + c_n\xi_n \in N\left(c_1\mu_1 + \dots + c_n\mu_n, \sqrt{c_1^2\sigma_1^2 + c_2^2\sigma_2^2 + \dots + c_n^2\sigma_n^2}\right)$$

eller kortare:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k\xi_k \in N\left(\sum_{k=1}^{n} c_k\mu_k, \sqrt{\sum_{k=1}^{n} c_k^2\sigma_k^2}\right)$$

Ex: $\xi_1 \in N(1,2)$, $\xi_2 \in N(2,3)$ oberoende

a) $\xi = 4\xi_1 + 5\xi_2 \Rightarrow \xi \in N(4\cdot 1 + 5\cdot 2, \sqrt{4^2\cdot 2^2 + 5^2\cdot 3^2}) =$

$= N(14, \sqrt{64+225}) = N(14, \sqrt{289}) =$

$= N(14, 17)$

Vi kan nu t ex räkna ut

$$P(\xi \geq 12) = P(\underbrace{\frac{\xi - 14}{17}}_{=\eta \in N(0,1)} \geq \frac{12-14}{17}) = P(\eta \geq -\tfrac{2}{17}) = P(\eta \leq \tfrac{2}{17}) \approx$$

Sats 6A sid 156

$$\approx \Phi(0{,}118) \approx 0{,}548$$

Tabell sid 309

b) $\bar{\xi} = \dfrac{\xi_1 + \xi_2}{2} \in N\left(\tfrac{1}{2}\cdot 1 + \tfrac{1}{2}\cdot 2, \sqrt{\tfrac{1}{2^2}\cdot 2^2 + \tfrac{1}{2^2}\cdot 3^2}\right) = N\left(\tfrac{3}{2}, \sqrt{1 + \tfrac{9}{4}}\right) =$

$= N\left(\tfrac{3}{2}, \sqrt{\tfrac{13}{4}}\right) = N\left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{\sqrt{13}}{2}\right)$

Sats 6D

Om $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ är oberoende och alla $\xi_k \in N(\mu, \sigma)$ samt

$\bar{\xi} = \frac{1}{n}(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$ så gäller att

$$\bar{\xi} \in N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

GENOMGÅNG LEKTION 10

Centrala gränsvärdessatsen (sid 168-169)

Antag att $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ är likafördelade och oberoende stokastiska variabler med $E(\xi_k)=\mu$ och $V(\xi_k)=\sigma^2$.

För stora n och $\xi=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k$ så gäller approximativt att

$\xi \in N(n\mu, \sqrt{n}\sigma)$.

Tumregel: I den här kursen betraktas $n \geq 30$ som stort för de fall som ej täcks av Figur 6.6 sid 172

Ex: $\begin{cases}\xi_k \in Exp(0{,}01) \\ \text{oberoende} \\ k=1,2,\ldots,100\end{cases} \Rightarrow E(\xi_k)=\frac{1}{0{,}01}=100,\ \sigma^2=V(\xi_k)=\frac{1}{0{,}01^2}$

$\sigma=\frac{1}{0{,}01}=100$

Om alla ξ_k är oberoende och $\xi=\sum_{k=1}^{100}\xi_k$ så gäller

approximativt att $\xi \in N(100\cdot 100, \sqrt{100}\cdot 100)=N(10000, 1000)$ och

$P(\xi<11000)=P(\underbrace{\frac{\xi-10000}{1000}}_{=\eta \in N(0,1)}<\frac{11000-10000}{1000})=P(\eta<1)\approx 0{,}8413$.

Ex: Om man kastar 3 tärningar 100 gånger, vad är då sannolikheten att få minst en sexa i minst 50 av kasten?

Låt ξ_k = antal sexor vid kast nummer k

$P(\xi_k=n)=\binom{3}{n}\left(\frac{1}{6}\right)^n\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{3-n}$, dvs $\xi_k \in Bin(3,\frac{1}{6})$

$P(\text{minst en sexa vid kast nummer } k)=P(\xi_k\geq 1)=1-P(\xi_k=0)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^3$

Med sannolikhet $p=1-\left(\frac{5}{6}\right)^3$ för minst en sexa gör vi nu 100 statistiskt oberoende kast. Om ξ = "antalet kast med minst en sexa" så är $P(\xi=n)=\binom{100}{n}p^n\cdot(1-p)^{100-p}$,

dvs $\xi \in Bin(100,p)$, så att $E(\xi)=100p$ och $V(\xi)=100p(1-p)$. (*)

Vi har tabellvärden för $Bin(n,b)$ endast för $n\leq 30$ och att räkna ut $P(\xi\geq 50)$ för hand är omständigt. Approximationen $\xi \in Po(100p)$ från sid 87 ger en lösning. En annan får vi genom att införa $\alpha_k=\begin{cases}1 & \text{om minst en sexa vid kastnummer } k, \\ 0 & \text{annars.}\end{cases}$

Eftersom ξ = antalet kast med minst en sexa så följer att $\xi=\sum_{k=1}^{100}\alpha_k$. Detta och (*) ger approximationen

$\xi \in N(100p, \sqrt{100p(1-p)}) \approx N(42.1296, 4.93767)$

Detta ger att

$$P(\xi \geq 50) \approx P\Big(\underbrace{\frac{\xi - 42{,}1296}{4{,}93767}}_{=\eta \in N(0,1)} \geq \frac{50 - 42{,}1296}{4{,}93767}\Big) \approx P(\eta \geq 1{,}59394) =$$

$$= 1 - P(\eta \leq 1{,}59394) \approx 1 - 0{,}944529 \approx 0{,}055$$

Svar: Ca 5,5 procent chans att få minst en sexa i minst 50 av kasten.

Dock lite sämre precision än väntat. Kontrollräkning i Matlab gav 6,8% chans.

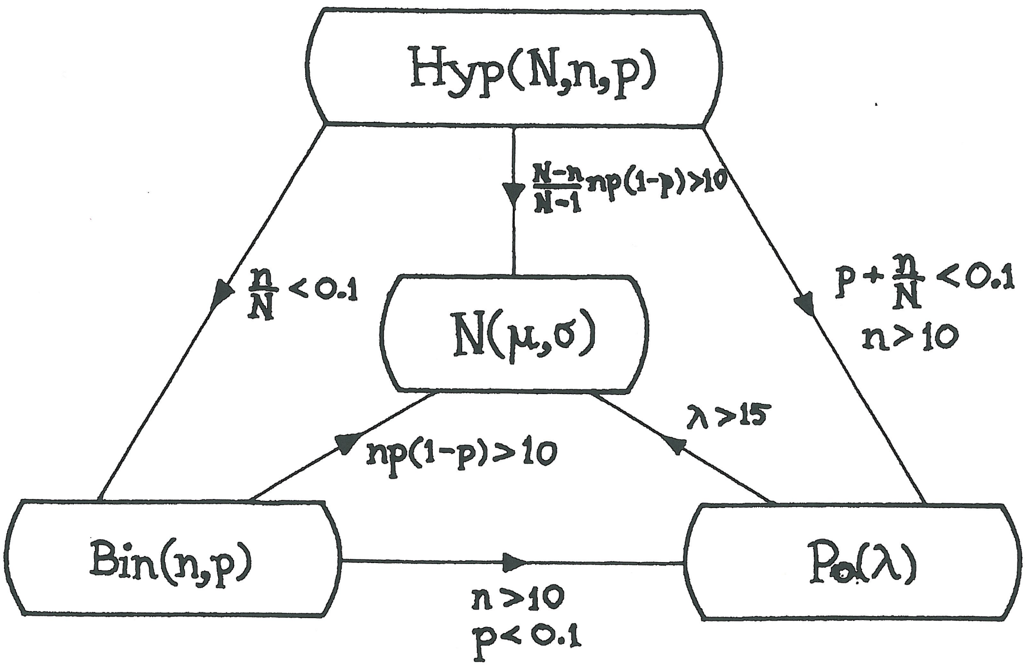
```
%% Lektion 9: Sannolikhet att få minst en sexa i minst 50 av 100 kast
%% med tre tärningar
p=1-(5/6)^3;
P=0;
for nn=50:100
  % Next line gives warning message
  % "Warning: Result may not be exact. Coefficient is greater than
  %  9.007199e+15 and is only accurate to 15 digits"
  % P=P+binomDistr(100,p,nn);
  % Thus we do the following instead:
  P=P+binopdf(nn,100,p);
end
disp(['P(minst en sexa i minst 50 av 100 kast med tre tärningar) = ' ...
      num2str(P) '.'])

function y=binomDistr(n,p,x)
y=nchoosek(n,x).*p.^x.*(1-p).^(n-x);
```

Gav följande resultat:

```
P(minst en sexa i minst 50 av 100 kast med tre tärningar) = 0.068403.
```

Villkor för approximationer i boken:

I övriga fall har vi i denna kurs tumregeln att approximera med $N(\mu,\sigma)$ är ok för $n \geq 30$. (Finns någon uppgift med $n \approx 35$.)



Figur 6.6 Approximationer mellan fördelningar.