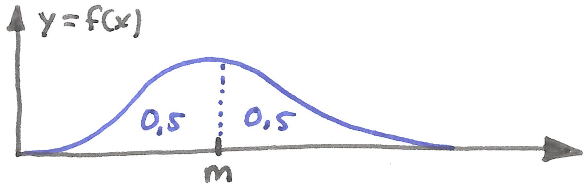
Genomgång lektion 11, Del 1 (Avsnitt 8.1: Teckenintervall)

Kom ihåg: För en stokastisk variabel ξ med fördelningsfunktion F är medianen det tal m som uppfyller $F(m) = 0.5$.



Låt $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ vara ett oberoende stickprov av ξ (dvs samma fördelning). Om $\xi(1), \xi(2), \dots, \xi(n)$ är samma variabler sorterade i växande ordning, hur sannolikt är det då att

$m \in [\xi(1+k), \xi(12-k)] = I$?

Knep: Inför η = antal ξ_i sådana att $\xi_i < m$.

Eftersom alla ξ_i är oberoende och $P(\xi_i < m) = 0.5$ så följer att

$$\boxed{\eta \in Bin(n, 0.5)}$$

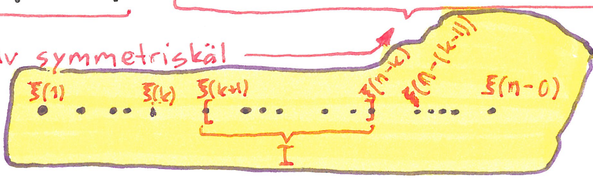
$$P(m \in I) = 1 - P(\underline{m \text{ till vänster om } I} \text{ eller } \underline{m \text{ till höger om } I}) =$$

Disjunkta händelser

$$= 1 - \left(\underbrace{P(\max k \text{ stycken } \xi_i < m)} + \underbrace{P(\max k \text{ stycken } \xi_i > m)}_{= P(\max n-k\ \xi_i < m) = P(\eta \leq n-k) = P(\eta \leq k)}\right)$$

Lika av symmetriskäl

$$\boxed{P(m \in I) = 1 - 2 \cdot P(\eta \leq k)}$$



Ex: Om $n = 6$ och vi för ξ_i observerar värdena

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (3.1, 5.2, 1.3, 0.7, 7.2, 2.3) \qquad (*)$$

Låt $I = [\xi(2), \xi(5)]$ och η = antal $\xi_i < m \in Bin(6, 0.5)$.

$$P(m \in [\xi(2), \xi(5)]) = 1 - (P(\max \text{ ett } \xi_i < m) + P(\max \text{ ett } \xi_i > m))$$

$$= 1 - 2 \cdot P(\eta \leq 1) =$$

$$= 1 - 2 \cdot \left(\binom{6}{0} 0{,}5^0 0{,}5^6 + \binom{6}{1} 0{,}5^1 0{,}5^5\right) = 1 - 2 \cdot 7 \cdot 0{,}5^6$$

$$\approx 0{,}7813$$

> För de observerade värdena i (*) säger vi att $[1{,}3,\ 5{,}2]$ är ett <u>konfidensintervall</u> för medianen med <u>konfidensgrad</u> $0{,}78$.

Denna typ av konfidensintervall kallas även teckenintervall, eftersom enbart tecknet på $\xi_i - m$ används vid beräkning av konfidensgrad.

Eventuell extrauppgift: 8.2 från förra lektionsbladets "Inför lektion 11". (se nästa sida.)

(Hinns dock knappast med på lektion.)

8.2 Man har undersökt brottgränsen för ett visst material vid engångsbelastningar. Vid ett experiment med 12 prov uppmättes följande värden:

117.1	116.5	115.9	116.8	117.7	115.6
115.9	116.9	116.7	117.1	116.4	115.0

Mätvärden kan antas vara observerade värden på oberoende och likafördelade kontinuerliga stokastiska variabler. Bestäm ett konfidensintervall för "medianbrottgränsen" med konfidensgrad så nära 95% som möjligt. Ange den exakta konfidensgraden.

Uppgifter inför lektion 11

8.1 sid 197

8.1 Följande mätserier är upprepade observationer på 6 oberoende och likafördelade kontinuerliga stokastiska variabler med median m. Beräkna för varje mätserie ett 96.9% konfidensintervall för m. Rita sedan upp intervallen som på sid 195.

Sökt: Konfidensintervall med konfidensgrad 96,9% för stickprov $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_6$.

Som på förra sidan så fås konfidensgrad $1-2\cdot 0{,}5^6 = 0{,}96875$ för konfidensintervallet $[\xi(1), \xi(n)]$.

För de givna mätserierna ger detta

Mätserie	Konfidensintervall
1	[2.23, 18.88]
2	[0.92, 19.79]
3	[3.68, 19.87]
4	[1.66, 18.97]
5	[0.36, 18.66]

(diagram som i facit sid 325)

Mätserie	Mätvärden					
1	18.88	2.23	15.31	7.50	8.23	12.96
2	19.79	6.65	19.59	4.00	0.92	3.33
3	3.68	15.17	5.50	19.87	10.15	6.18
4	1.66	2.19	6.91	15.82	9.39	18.97
5	14.91	0.53	0.43	18.66	11.00	0.36

8.2, sid 197

För ett stickprov $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{12}$ med konfidensintervall $[\xi(k+1), \xi(12-k)] = I$ och fördelning med median m, låt

η = antalet mätvärden ξ_i för vilka $\xi_i < m$. (Alltså: $\eta = 0, 1, 2, \ldots, 10, 11$ eller 12)

Vi kan se ξ_k som 12 oberoende försök som alla har sannolikhet 0,5 för gynnsamt utfall, dvs $\eta \in \mathrm{Bin}(12, 0.5)$.

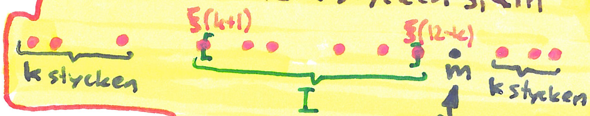
Vi får då att

$$P(m \in I) = 1 - P(\overbrace{\underbrace{m \text{ till vänster om } I}_{A} \text{ eller } \underbrace{m \text{ till höger om } I}_{B}}^{A\cup B}) =$$

A, B disjunkta händelser (= kan ej inträffa samtidigt), så $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - \underbrace{P(A\cap B)}_{=0} = P(A) + P(B)$

$$= 1 - \left(P(\text{högst } k \text{ stycken } \xi_i < m) + P(\text{högst } k \text{ stycken } \xi_i > m)\right) =$$

dvs minst 12-k stycken $\xi_i < m$



Högst k stycken $\xi_i > m$

$\Updownarrow$ ← Ty $m \notin I$

Minst $12-k$ stycken $\xi_i < m$

Enklare: Bara konstatera att de är lika som på förra sidan

$$= 1 - (P(\eta \le k) + \underbrace{P(\eta \ge 12-k)}_{=P(\zeta \le k) \text{ för } \zeta \in \mathrm{Bin}(12,0.5)})$$

som påpekat i tabell sid 302

$$= 1 - 2\cdot P(\eta \le k), \quad \eta \in \mathrm{Bin}(12, 0.5)$$

Från tabell sid 303 fås

Närmast 95% för $I = [\xi(3), \xi(10)]$

k	0	1	2	3
$P(m\in I)$	0.9996	0,9936	0,9614	0,854

SVAR: Konfidensintervallet [115.9, 117.1] har konfidensgrad 96,1%.

Genomgång Lektion 11 del 2 (Avsnitt 8.2)

Förra lektionen: Intervallskattning av medianen för en stokastisk variabel med okänd frekvensfunktion, väntevärde och varians.

Idag: Intervallskattning av väntevärde för $\xi \in N(\mu, \sigma)$ i två olika fall: a) σ känd
b) σ okänd

Punktskattningar (se avsnitt 7.3, sid 181–)
Efektivast skattningar för normalfördelning:
$\mu^* = \bar{\xi}$
$\sigma^{2*} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \bar{\xi})^2$,
$\sigma^{2*}_{obs} = s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right)$

Formelblad sid 2

$\xi \in N(\mu, \sigma)$, σ känd

Givet ett stickprov $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ med medelvärde $\bar{\xi}$, $\bar{\xi} \in N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$,

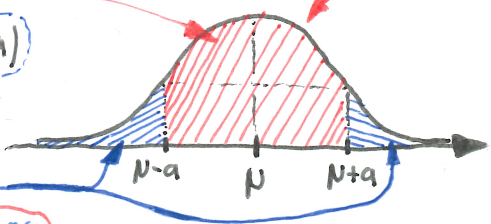
- vilket a ger ett symmetriskt konfidensintervall för μ $[\bar{\xi} - a, \bar{\xi} + a]$ som med sannolikhet 0,99 innehåller μ (dvs konfidensgrad 0,99)?

μ = median för symmetriska fördelningar.

$$0{,}99 = P(\bar{\xi} - a \le \mu \le \bar{\xi} + a) = P(\bar{\xi} - a \le \mu \text{ och } \mu \le \bar{\xi} + a) =$$

$$= P(\bar{\xi} \le \mu + a \text{ och } \mu - a \le \bar{\xi}) = P(\mu - a \le \bar{\xi} \le \mu + a) =$$

$$= P(\bar{\xi} \le \mu + a) - P(\bar{\xi} \le \mu - a) = 1 - 2P(\bar{\xi} \ge \mu + a)$$



$$\frac{1 - 0{,}99}{2} = P(\bar{\xi} \ge \mu + a) = P\Bigg(\underbrace{\frac{\bar{\xi} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}_{\in N(0,1)} > \frac{\mu + a - \cancel{\mu}}{\sigma/\sqrt{n}}\Bigg)$$

sid 206

$$\frac{a}{\sigma/\sqrt{n}} = \lambda_{\frac{\alpha}{2}} \qquad \alpha = 1 - 0{,}99 = 1 - \text{konfidensgrad.}$$

Konfidensintervall $[\bar{x} - a, \bar{x} + a]$ med

$$\boxed{a = \lambda_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \ \alpha = 1 - \text{konfidensgrad}, \ \lambda_{\frac{\alpha}{2}} \text{ fås ur tabell sid 310.}}$$

Ex: Observerat stickprov av storlek 7 med medelvärde $\bar{x} = 3.4$, $\sigma = 1.2$.
$\alpha = 1 - 0{,}99 = 0{,}01$. Konfidensintervall $[\bar{x} - a, \bar{x} + a]$ med
$$a = \lambda_{0{,}005} \cdot \frac{1.2}{\sqrt{7}} \approx 2.5758 \cdot \frac{1{,}2}{\sqrt{7}} \approx 1{,}16827.$$
För att garantera <u>minst</u> 99% chans att $\mu \in [\bar{x} - a, \bar{x} + a]$ så avrundar vi ändpunkterna "utåt" till större intervall:
Konfidensintervall $[2.31, 4.57]$.

$\xi \in N(\mu, \sigma)$, σ okänd

Vi räknar på samma sätt, men med σ okänd så får vi nöja oss med en skattning σ^*

$$\sigma^{*2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (\bar{\xi} - \xi_i)^2$$ (Avsnitt 7.3 och sid 2 i formelsamlingen.)

Då är $\dfrac{\bar{\xi} - \mu}{\sigma^*/\sqrt{n}}$ inte normalfördelad, men man kan visa att den har så-kallad $t(n-1)$-fördelning, som finns i tabell på sid 311.

t-fördelning med n-1 frihetsgrader.

Vi har, som tidigare, $\bar{\xi} \in N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ och

$$0{,}99 = P(\underbrace{\bar{\xi} - c\cdot\frac{\sigma^*}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{\xi} + c\cdot\frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}}_{\mu\,\in\,\text{konfidensintervall}}) = P\left(\bar{\xi} \leq \mu + c\cdot\frac{\sigma^*}{\sqrt{n}} \text{ och } \mu - c\cdot\frac{\sigma^*}{\sqrt{n}} \leq \bar{\xi}\right)$$

$$= P\left(\mu - c\cdot\frac{\sigma^*}{\sqrt{n}} \leq \bar{\xi} \leq \mu + c\cdot\frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}\right) = 1 - 2P\left(\bar{\xi} \geq \mu + c\cdot\frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\overbrace{1-0{,}99}^{=\alpha}}{2} = P\left(\bar{\xi} \geq \mu + c\cdot\frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}\right) = P\left(\underbrace{\frac{\bar{\xi}-\mu}{\sigma^*/\sqrt{n}}}_{\in\, t(n-1)} \geq c\right)$$

$$c = t_{\alpha/2}(n-1)$$

sid 206

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Vi har alltså konfidensintervallet } [\bar{x}-a, \bar{x}+a] \text{ med} \\ a = t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}, \text{ där } \alpha = 1 - \text{konfidensgrad och } t_{\alpha/2}(n-1) \text{ fås ur tabell sid 311.}\end{array}}$$

Ex: Observerat stickprov av storlek 7 för vilket formler på sid 2 i formelsamlingen ger att $\bar{x} = 3.4$ och s = observation av σ^* = 5.6. Konfidensintervall med konfidensgrad 0,99 är då $[\bar{x}-a, \bar{x}+a]$ med

$$a = t_{0{,}005}(6)\frac{5.6}{\sqrt{7}} \approx 3{,}707 \cdot \frac{5.6}{\sqrt{7}} \approx 7{,}8462,$$

vilket ger konfidensintervall $(-4{,}45,\ 11{,}24)$

Genomgång lektion 12, stickprov i par

Exempel (Påhittat.)

Kolesterolhalt i blodet mäts hos 5 personer före och efter en testperiod med ändrad kost och motion. ξ_i = halt före, η_i halt efter.

Observationer	1	2	3	4	5	
Före: x_i	262	272	284	298	294	$\leftrightarrow \xi_i$
Efter: y_i	252	262	278	282	278	$\leftrightarrow \eta_i$

Ser ut att vara lägre värden efter, men hur mycket lägre och med vilken sannolikhet? Kan vi t ex besvara frågan med ett 95% konfidensintervall?

Modellantagande: $\eta_i \in N(\mu_i, \sigma_1)$ oberoende, μ_i, σ_1 okända

beroende?

Eftersom detta är två mätningar på samma person så kan vi förvänta oss statistiskt beroende.

$\xi_i \in N(\mu_i + \Delta, \sigma_2)$ oberoende, σ_2 okänd

Δ = förväntad systematisk skillnad mellan kolesterolhalt före och efter.

Låt $\zeta_i = \xi_i - \eta_i \in N(\mu_i + \Delta - \mu_i, \sigma) = N(\Delta, \sigma)$, σ okänd

(om vi hade haft oberoende mellan η_i och ξ_i så hade vi fått $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$, men det skulle inte ändra något eftersom σ_1 och σ_2 är okända.)

För ζ_i har vi observerade värden $z_i = x_i - y_i$

i	1	2	3	4	5
z_i	10	10	6	16	16

Formler från sid 206 ger nu ett 95% konfidensintervall för Δ:

$[\bar{z} - a, \bar{z} + a]$, där

$\alpha = 1 - 0.95 = 0.05$

$\bar{z} = \frac{58}{5} = 11.6$

$\sum_{k=1}^{5} z^2 = 748$

$s^2 = \frac{1}{5-1}\left(\sum_{k=1}^{5} z_k^2 - 5\bar{z}^2\right) = \frac{1}{4}(748 - 5 \cdot 11.6^2) = 18.8$

$a = t_{0,025}(5-1)\frac{\sqrt{18,8}}{\sqrt{5}} \approx 2.776 \cdot \sqrt{\frac{18,8}{5}} \approx 5.382863$

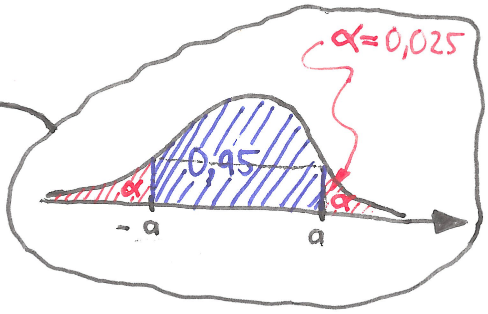
SVAR: 95% konfidensintervall $[6.2, 17.0]$, dvs med 95% säkerhet sänks kolesterolhalten med mellan 6.2 och 17 enheter.

Formeln för konfidensintervallet härleds som i läroboken:

$$0{,}95 = P\left(\bar{\zeta} - b\cdot\frac{\sigma^*}{\sqrt{5}} \le \Delta \le \bar{\zeta} + b\cdot\frac{\sigma^*}{\sqrt{5}}\right) = P\left(\bar{\zeta} - \Delta \le b\cdot\frac{\sigma^*}{\sqrt{5}} \text{ och } -b\cdot\frac{\sigma^*}{\sqrt{5}} \le \bar{\zeta} - \Delta\right)$$

$$0{,}95 = P\left(-b \le \underbrace{\frac{\bar{\zeta}-\Delta}{\sigma^*/\sqrt{5}}}_{=\tau\in t(4)} \le b\right)$$

$$\Updownarrow$$



$$0{,}025 = P(\tau \ge b)$$

$$\Updownarrow$$

$$b = t_{0{,}025}(4) \approx 2{,}776$$ enligt tabell sid 311

Genomgång, lektion 13

1 Förra lektionen: Stickprov i par

$$\left.\begin{array}{l} \xi_k \in N(\mu_k, \sigma_1) \\ \eta_k \in N(\mu_k + \Delta, \sigma_2) \end{array}\right\} k = 1, 2, \ldots, n$$

Vi kan ha oberoende ξ_k och η_k (t ex vid kast med två tärningar, varav den ena preparerad med en vikt som ger fler sexor). Metoden förutsätter ej att ξ_k och η_k är oberoende

Parvisa observationer (ξ_k, η_k) som ej behöver vara inbördes oberoende. Dock är (ξ_k, η_k) oberoende av andra par (ξ_m, η_m).

$\zeta_k = \eta_k - \xi_k \in N(\Delta, \sigma)$ (oklart hur σ beror av σ_1, σ_2 om ξ_k och η_k beroende).

$\bar{\zeta} \in N(\Delta, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ (här förutsätts $\zeta_k = \xi_k - \eta_k$ vara oberoende av $\zeta_m = \xi_m - \eta_m$).

Observationer $z_1, z_2, \ldots, z_n$ av ζ_k ger (via formler sid 2 i formelsamling) $\bar{z}$ och s^2.

Ett konfidensintervall $[\bar{z} - a, \bar{z} + a]$ för Δ fås för

$$a = \underbrace{t_{\alpha/2}(n-1)}_{\text{Tabell sid 311}} \frac{s}{\sqrt{n}} \quad \text{med} \quad \alpha = 1 - \text{konfidensgrad}.$$

(Formler härleds sid 202-205)

Liknande fast enklare om σ känd: $a = \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

2 Nytt idag: Två oberoende stickprov (sid 214-215)

samma!

$$\begin{cases} \xi_k \in N(\mu_1, \sigma), \ k = 1, 2, \ldots, n_1 \\ \eta_k \in N(\mu_2, \sigma), \ k = 1, 2, \ldots, n_2 \\ \text{alla } \xi_k \text{ och } \eta_k \text{ oberoende.} \end{cases}$$

med observerade värden x_k

med observerade värden y_k

samma för alla k

Får vara olika

OBS! I de flesta tillämpningar kan man misstänka lite olika σ för stickproven och formel (8.6) gäller approximativt även då, så vi kommer att använda denna metod även i sådana fall.

Ger att $\bar{\xi} \in N(\mu_1, \frac{\sigma}{\sqrt{n_1}})$

$\bar{\eta} \in N(\mu_2, \frac{\sigma}{\sqrt{n_2}})$

$$\bar{\xi} - \bar{\eta} \in N\left(\mu_1 - \mu_2, \sqrt{\frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2}}\right) = N\left(\mu_1 - \mu_2, \sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right)$$

Från observationer x_k, y_k och formler i formelbladet: $\bar{x}, \bar{y}, s_x^2, s_y^2$

Formel (8.6) sid 214 ger sedan bättre skattning av σ:

$$s^2 = \sigma_{obs}^{2*} = \frac{(n_1 - 1)s_x^2 + (n_2 - 1)s_y^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)}$$

Konfidensintervall $[\bar{x} - \bar{y} - a, \bar{x} - \bar{y} + a]$ för $\mu_1 - \mu_2$ är

$$a = \underbrace{t_{\alpha/2}((n_1 - 1) + (n_2 - 1))}_{\text{Tabell sid 311}} \cdot s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

Formler härleds på sid 214-216

OBS! I (tenta)uppgifter där både 1 och 2 funkar: Välj 2 för full poäng. Går visa att större stickprov och (8.6) i allmänhet ger mindre s och konfidensintervall. (Detaljer komplicerade.)

Exempel 8.8

Vid en undersökning av hur hållfastheten hos cement beror av härdningstiden bestämdes hållfastheten hos provkroppar, som härdats under 2 respektive 7 dagar. Man fick följande resultat (i kp/m^2)

Härdningstid	Hållfasthet						
2 dagar	21.8	21.7	20.0	22.5	22.0	22.1	21.9
7 dagar	32.4	31.8	34.5	33.9	34.4	34.2	34.3

Hållfastheten vid de båda härdningstiderna kan antas vara normalfördelad med samma standardavvikelse σ.

$$\bar{x} = \frac{152}{7}$$

$$\sum_{k=1}^{7} x_k^2 = 3304.4$$

$$s_x^2 = \frac{1}{6}\left(3304.4 - 7\cdot\left(\frac{152}{7}\right)^2\right) = \frac{26.8}{6\cdot 7} \approx 0,638\,095$$

$$\bar{y} = \frac{235.5}{7}$$

$$\sum_{k=1}^{7} y_k^2 = 7929.95$$

$$s_y^2 = \frac{1}{6}\left(7929.95 - 7\cdot\left(\frac{235.5}{7}\right)^2\right) = \frac{49.4}{6\cdot 7} \approx 1,176\,190$$

Bättre skattning av σ från (8.6):

$$s^2 = \frac{6\cdot s_x^2 + 6\cdot s_y^2}{6+6} = \frac{\cancel{6}\,(s_x^2+s_y^2)}{\cancel{6}\cdot 2} = \frac{38.1}{6\cdot 7} \approx 0,907\,143$$

$$\bar{x}-\bar{y} = -\frac{83.5}{7}$$

95% konfidensintervall: $\left[-\frac{83.5}{7} - a\ ,\ -\frac{83.5}{7} + a\right]$ med

$$a = t_{0.025}(6+6)\cdot s\sqrt{\frac{1}{7}+\frac{1}{7}} \approx 2.179\cdot\sqrt{\frac{38.1}{6\cdot 7}}\cdot\sqrt{\frac{2}{7}} \approx 1,11093$$

SVAR: $[-13.04, -10.82]$ är ett 95% konfidensintervall för $\mu_1-\mu_2$,

dvs med 95% säkerhet så blir genomsnittliga hållfastheten mellan 10.81 och 13.04 kp/m^2 högre med 7 dagars härdningstid.

Genomgång lektion 14 (Hypotesprövning, Enkla hypoteser 9.1)

Givet: ett stickprov $\xi_k \in N(\mu, 3)$, $k=1,2,\dots,n$ där

μ är okänd men där vi har två olika hypoteser:

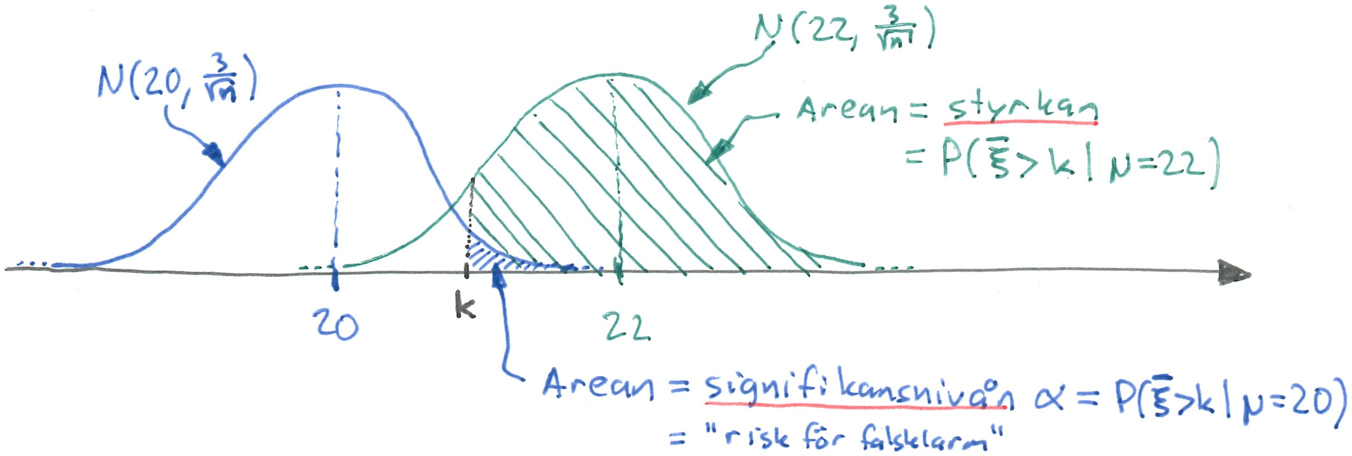
$H_0: \mu = 20$ (Nollhypotes) = "gängse uppfattning" = det man vill bestrida/motbevisa

$H_1: \mu = 22$ (Mothypotes) = det man själv tror på och vill argumentera för

Strategi: Vi inför ett tröskelvärde k och

förkastar H_0 om $\bar{x} > k$. (1)

Vi har att $\bar{\xi} \in N(\mu, \frac{3}{\sqrt{n}})$ så frekvensfunktion en av följande:



Vi vill övertyga någon om att H_1 är sann genom att välja k så att det är liten risk, säg 1% risk att utropa H_1 som segrare om H_0 är sann:

$$0{,}01 = P(\bar{\xi} > k \mid \mu = 20) = P\Big(\underbrace{\frac{\bar{\xi}-20}{3/\sqrt{n}}}_{\in N(0,1)} > \frac{k-20}{3/\sqrt{n}} \;\Big|\; \mu = 20\Big)$$

$$\frac{k-20}{3/\sqrt{n}} = \lambda_{0{,}01} \approx 2.3263$$

$$k \approx 2.3263 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} + 20$$

Har vi t.ex $n = 21$ så är $k \approx 21.522921 \approx 21.52$

Hur stor är då testets styrka, dvs sannolikheten att korrekt detektera att $\mu = 22$ när $\mu = 22$?

$$\text{styrkan} = P(\bar{\xi} > k \mid \mu = 22) = P\Big(\underbrace{\frac{\bar{\xi}-22}{3/\sqrt{21}}}_{=\eta \in N(0,1)} > \overbrace{\frac{k-22}{3/\sqrt{21}}}^{\text{negativ}} \;\Big|\; \mu = 22\Big) = P\Big(\eta < \frac{22-k}{3/\sqrt{21}}\Big)$$

$$\approx P(\eta < 0.7287) \approx 0.7668$$

SVAR: styrkan ≈ 0.7668.

Genomgång L15, Hypotesprövning

Nytt: • Mothypotes olikhet (t ex $\mu < 123$ eller $\mu \neq 123$)
• σ känd eller okänd

Ex: a) $\xi_i \in N(\mu, \sigma)$, $i = 1, 2, \ldots, 13$, μ och σ okända.

$\bar{\xi} \in N(\mu, \sigma/\sqrt{13})$

$H_0: \mu = 100$ om H_0 sant så gäller att $\eta = \frac{\bar{\xi} - 100}{\sigma^*/\sqrt{13}} \in t(12)$

$H_1: \mu \neq 100$

strategi: $\boxed{H_0 \text{ förkastas om } t = \frac{\bar{x} - 100}{s/\sqrt{13}} < -k \text{ eller om } t > k.}$

För signifikansnivå 5% har vi av symmetriskäl att

$$0.05 = P\left(\frac{\bar{\xi} - 100}{\sigma^*/\sqrt{13}} < -k \text{ eller } \frac{\bar{\xi} - 100}{\sigma^*/\sqrt{13}} > k \,\middle|\, \mu = 100\right) = 2P(\eta > k)$$

$$0{,}025 = P(\eta > k)$$

$$\boxed{k = t_{0.025}(12) \approx 2.179}$$

b) Vilken slutsats dras om observerade värden ger $\bar{x} = 102$ $s = 3.0$?

$$t = \frac{102 - 100}{3/\sqrt{13}} \approx 2.40 \notin [-2.179, 2.179] \Rightarrow H_0 \text{ förkastas}$$

Exempel 9.3 sid 237

$\xi_i \in N(\mu, 15)$, $i = 1, 2, \ldots, 9$ $\bar{\xi} \in N(\mu, \frac{15}{\sqrt{9}}) = N(\mu, 5)$

$$\begin{cases} H_0: \mu = 100 \\ H_1: \mu > 100 \end{cases}$$

Strategi: Förkasta H_0 om $\bar{\xi} > k$

För 5% signifikansnivå har vi att

$$0.05 = P(\bar{\xi} > k \mid \mu = 100) = P\Big(\underbrace{\frac{\bar{\xi} - 100}{5}}_{\in N(0,1)} > \frac{k - 100}{5} \,\Big|\, \mu = 100\Big)$$

$$\frac{k - 100}{5} = \lambda_{0{,}05} \approx 1{,}6449$$

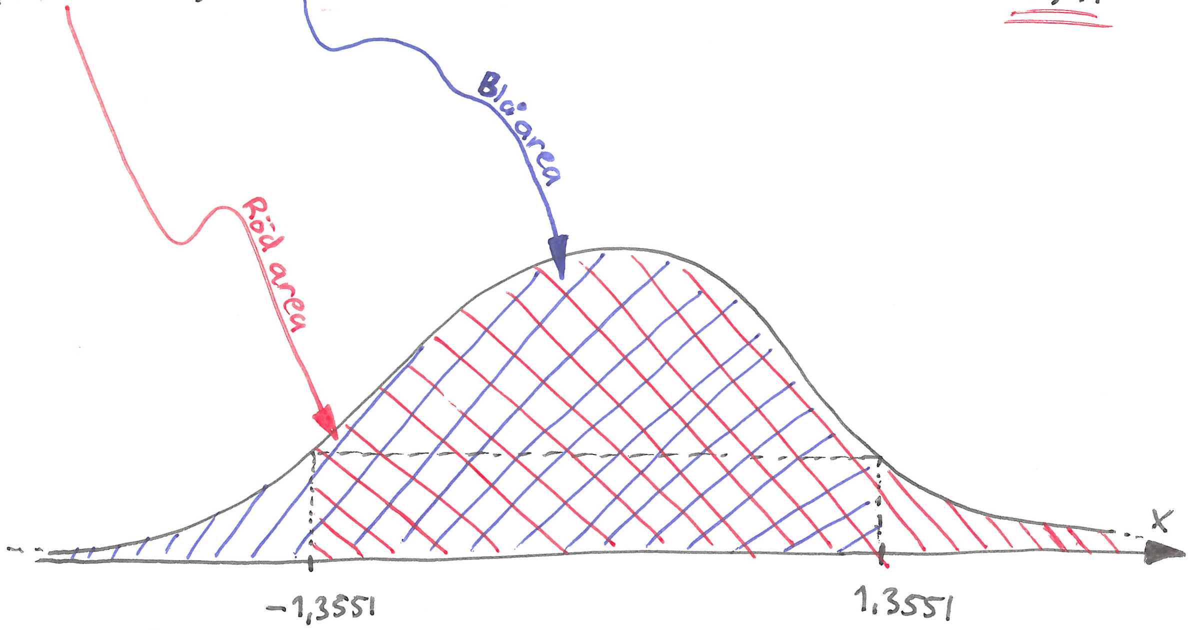
$$k \approx 5 \cdot 1{,}6449 + 100$$

$$k \approx 108{,}2245$$

Vad är testets styrka om $N=115$?

$$\text{styrkan} = P(H_0 \text{ förkastas} \mid N=115) = P\Big(\underbrace{\frac{\bar{\xi}-115}{5}}_{=\eta\,\in N(0,1)} > \frac{108.2245-115}{5} \,\Big|\, N=115\Big)$$

$$\approx P(\eta > -1,3551) = P(\eta < 1,3551) \approx \frac{0,9115+0,9131}{2} = 0,9123 \approx \underline{\underline{0,91}}$$



Genomgång lektion 16

Förra lektionen: Hypotesprövning med signifikansnivå α

$\bar{\xi} \in N(\mu, \sigma)$, σ känd

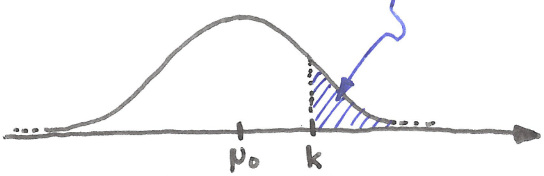
Ensidig mothypotes

$H_0: \mu = \mu_0$

$H_1: \mu > \mu_0$

Beslutsstrategi: H_0 förkastas om $\bar{x} > k$

α = signifikansnivå

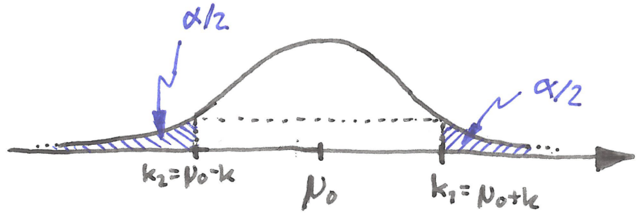


Tvåsidig mothypotes

$H_0: \mu = \mu_0$

$H_1: \mu \neq \mu_0$

Beslutsstrategi: Förkasta H_0 om $|\bar{x} - \mu_0| > k$



k väljs så att $\alpha = P(H_0 \text{ förkastas} \mid \mu = \mu_0)$

Styrka $S(\mu_1) = P(H_0 \text{ förkastas} \mid \mu = \mu_1)$

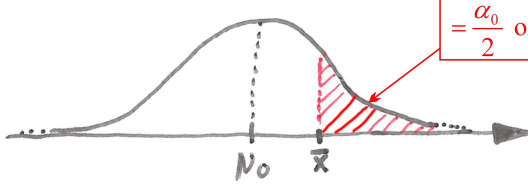
Idag: Direktmetoden.

Räkna ej ut något tröskelvärde k först. Ej heller någon styrka.

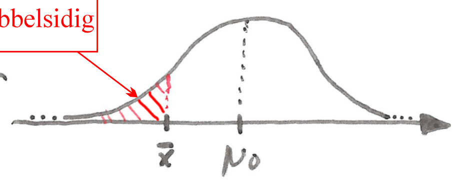
Istället: 1) Räkna ut $\alpha_0 = P(\bar{\xi}$ är "samma som $\bar{x}$ eller extremare" $\mid \mu = \mu_0)$

$= \alpha_0$ om H_1 är enkelsidig

$= \dfrac{\alpha_0}{2}$ om H_1 är dubbelsidig



eller



2) H_0 förkastas om $\alpha_0 < \alpha$

α_0 i Vännmans bok $=$ P i Minitab (på kommande Lektioner och i Lab 3).

Ex: Förberedelseuppgiften "Inför lektion 16" från förra lektionsbladet.

I uppgift 1d) hade vi $\bar{\xi} \in N(\mu, \frac{1{,}72}{\sqrt{10}})$,

H_0: $\mu = 330$

H_1: $\mu < 330$

Strategi: Förkasta H_0 om $\bar{x} < 329.1$, vilket var ett test med signifikansnivån 5%

I 1d) konstaterade vi att om $\bar{x} = 328.5$ <329.1 så förkastas H_0 på signifikansnivån 5%.

Direktmetoden för observationen $\bar{x} = 328.5$ är att räkna ut

$$\alpha_0 = P(\bar{\xi} \leq 328.5 \mid \mu = 330) = P\Big(\underbrace{\frac{\bar{\xi} - 330}{1.72/\sqrt{10}}}_{\in N(0,1)} \leq \frac{328.5 - 330}{1.72/\sqrt{10}} \,\Big|\, \mu = 330\Big) \approx \Phi(-2.7578) = 1 - \Phi(2.7578)$$

$$\approx 1 - 0{,}997078 \approx 0.003$$

Eftersom $0{,}3\% < 5\%$ så drar vi slutsatsen att H_0 förkastas på 5% signifikansnivå.

Direktmetoden för binomialfördelning (Lab 2)

$\xi \in Bin(13, p)$

Tabell s. 304 för $p = 0.45$

$P(\xi \leq 9) \approx 0{,}9797$

$\frac{\alpha_0}{2} = P(\xi \geq 10) \approx 1 - 0{,}9797 = 0{,}0203$

H_0: $p = 0.45$

H_1: $p \neq 0.45$

Observerat stickprov: $x = 10$

Kan man på signifikansnivå 5% säga att $p \neq 0.45$?

304 *Binomialfördelningen*

n	x	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
13	0	0.5133	0.2542	0.1209	0.0550	0.0238	0.0097	0.0037	0.0013	0.0004	0.0001
	1	0.8646	0.6213	0.3983	0.2336	0.1267	0.0637	0.0296	0.0126	0.0049	0.0017
	2	0.9755	0.8661	0.6920	0.5017	0.3326	0.2025	0.1132	0.0579	0.0269	0.0112
	3	0.9969	0.9658	0.8820	0.7473	0.5843	0.4206	0.2783	0.1686	0.0929	0.0461
	4	0.9997	0.9935	0.9658	0.9009	0.7940	0.6543	0.5005	0.3530	0.2279	0.1334
	5	1.0	0.9991	0.9925	0.9700	0.9198	0.8346	0.7159	0.5744	0.4268	0.2905
	6	1.0	0.9999	0.9987	0.9930	0.9757	0.9376	0.8705	0.7712	0.6437	0.5000
	7	1.0	1.0	0.9998	0.9988	0.9944	0.9818	0.9538	0.9023	0.8212	0.7095
	8	1.0	1.0	1.0	0.9998	0.9990	0.9960	0.9874	0.9679	0.9302	0.8666
	9	1.0	1.0	1.0	1.0	0.9999	0.9993	0.9975	0.9922	0.9797	0.9539
	10	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.9999	0.9997	0.9987	0.9959	0.9888
	11	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.9999	0.9995	0.9983
	12	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.9999

10 ligger i "högra svansen" enligt tabellen

$$\alpha_0 = P(\xi = \text{"10 eller extremare"} \mid H_0) = 2(1 - P(\xi \leq 9 \mid \xi \in Bin(13, 0.45))) \approx 2(1 - 0{,}9797)$$

Dubbelsidig mothypotes

$\alpha_0 \approx 0{,}0406 < 0{,}05 = \alpha \Rightarrow H_0$ förkastas

SVAR: På 5% signifikansnivå drar vi slutsatsen att $p \neq 0.45$.