M0029M – Differentialkalkyl – Lektion 2

Ove Edlund

2017-08-29

Aritmetisk summa

Aritmetisk summa

Om $a_{k+1} - a_k = h$ för alla $k = 1, 2, \ldots, n-1$ så gäller

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$
$$= \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Geometrisk summa

Geometrisk summa

Om $r \neq 1$ så gäller

$$S_n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-2} + r^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} r^k$$
$$= \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

Geometrisk summa, alternativa former

- $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} r^{k-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1}$
- $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a\, r^{k-1} = a\, \frac{r^n - 1}{r - 1}$

Talmängder

Standardbeteckningar på några talmängder

- $\mathbb{N}$ – Naturliga tal, $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- $\mathbb{Z}$ – Heltal, $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- $\mathbb{Q}$ – Rationella tal, $(\frac{p}{q}$ där p och q är heltal)
- $\mathbb{R}$ – Reella tal

Ibland förekommer också

$\mathbb{Z}_+$ – positiva heltal
$\mathbb{Q}_+$ – positiva rationella tal
$\mathbb{R}_+$ – positiva reella tal

$\mathbb{Z}_-$ – negativa heltal
$\mathbb{Q}_-$ – negativa rationella tal
$\mathbb{R}_-$ – negativa reella tal

I dessa finns **inte** 0 med.

Rationella tal, irrationella tal

Rationella tal $(\frac{p}{q})$ kännetecknas av att decimalutvecklingen är antingen periodisk eller avslutad.

Exempel

$$\frac{2}{5} = 0.4 \qquad \frac{-2}{3} = -0.666666\ldots = -0.\overline{6}$$

$$\frac{4}{7} = 0.571428571428571428\ldots = 0.\overline{571428}$$

$$\frac{3643}{3000} = 1.2143333333\ldots = 1.214\overline{3}$$

Irrationella tal har oändliga decimalutvecklingar som inte är periodiska.

Exempel $\pi = 3.14159265\ldots \qquad \sqrt{2} = 1.41421356\ldots$

Reella tal

De **reella talen** får vi genom att ta alla **rationella** och alla **irrationella tal**.

Olikheter

Räkneregler för olikheter

1. $a < b \quad \Leftrightarrow \quad a + c < b + c$
2. Om $c > 0$ så gäller $\quad a < b \quad \Leftrightarrow \quad c\,a < c\,b$
3. Om $c < 0$ så gäller $\quad a < b \quad \Leftrightarrow \quad c\,a > c\,b$
4. $a > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{a} > 0$
5. $0 < a < b \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$

Absolutbelopp

Definition av absolutbelopp

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{då } x \geq 0 \\ -x, & \text{då } x < 0 \end{cases}$$

Observera att $|x| = \sqrt{x^2}$

Några egenskaper

- $|-a| = |a|$
- $|a\,b| = |a|\,|b|$
- $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$
- $|a+b| \leq |a| + |b|$

Absolutbelopp

Några samband

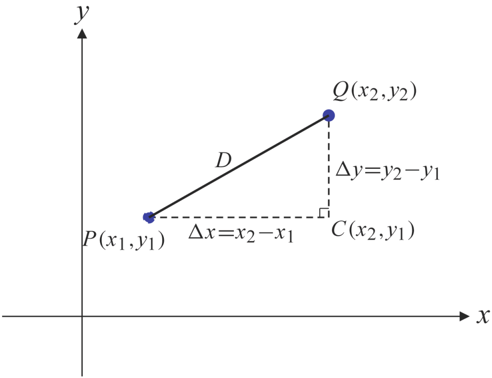
- $|x| = D \quad \Leftrightarrow \quad x = D$ eller $x = -D$
- $|x| < D \quad \Leftrightarrow \quad -D < x < D$ dvs. $-D < x$ och $x < D$
- $|x| > D \quad \Leftrightarrow \quad x > D$ eller $x < -D$

Sats: Triangelolikheten

För alla reella tal a och b gäller

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

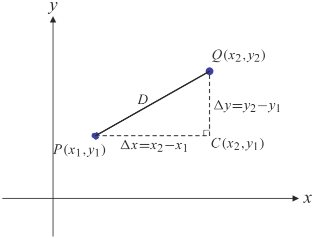
Avstånd mellan koordinater



Avståndet mellan (x_1, y_1) och (x_2, y_2) ges av

$$D = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Linjens ekvation



Linjens **riktningskoefficient**, m, ges av

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Linjens **lutning** är vinkeln mot x-axeln, φ, som har egenskapen $\tan\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = m$.

Linjens ekvation ges av

$y = mx + b$ där b är platsen där linjen passerar y-axeln

$y = m(x - a)$ där a är platsen där linjen passerar x-axeln

$y - y_0 = m(x - x_0)$ där (x_0, y_0) är en punkt på linjen

Ännu mer allmänt beskrivs linjer genom en **linjär ekvation**

$$A\,x + B\,y = C \text{ , där } A,\ B \text{ och } C \text{ är konstanter.}$$