M0029M – Differentialkalkyl – Lektion 20

Ove Edlund

2017-09-22

Primitiv funktion

Primitiv funktion

Om $F(x)$ och $f(x)$ är funktioner och

$$F'(x) = f(x)$$

så är $F(x)$ en primitiv funktion till $f(x)$.

Obestämd integral

Alla primitiva funktioner till $f(x)$ ges av den **allmänna primitiva funktionen** eller den **obestämda integralen**

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

där $F(x)$ är någon primitiv funktion till $f(x)$, och C är en godtycklig konstant.

Differentialekvationer

Ekvationer som innefattar en funktion $y(x)$ och dess derivator $y'(x)$, $y''(x)$, $y'''(x)$, ... kallas **differentialekvationer**.
Differentialekvationens **ordning** ges av den högsta derivata som finns i ekvationen. Ex:

$$y''' + y = x$$

är en **tredje** ordningens differentialekvation.

Den **allmänna lösningen**

$$y = x + A\,e^{-x} + e^{x/2}\left(B\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

beskriver **alla** lösningar.

Genom att ge konstanterna bestämda värden, ex: $A = 0$, $B = 1$ och $C = 0$ fås en **partikulärlösning**:

$$y = x + e^{x/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

Begynnelsevärdesproblem

Begynnelsevärdesproblem av ordning 2

En differentialekvation av ordning 2, t.ex.

$$y''(t) = 3$$

med villkor på $y(t)$ och $y'(t)$ vid en speciell tidpunkt $t = t_0$, t.ex.

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$$

kallas ett **begynnelsevärdesproblem** av ordning 2.

Begynnelsevärdesproblem, forts.

Lösningen till begynnelsevärdesproblemen finner man genom att plocka fram den allmänna lösningen, t.ex.

$$y(t) = \frac{3}{2}t^2 + A\,t + B$$

och sedan bestämma konstanterna A och B så att begynnelsevillkoren är uppfyllda:

$$\begin{cases} 1 = y(0) = \frac{3}{2} \cdot 0^2 + A \cdot 0 + B \\ -1 = y'(0) = 3 \cdot 0 + A \end{cases}$$

dvs. $A = -1$ och $B = 1$, vilket ger lösningen

$$y(t) = \frac{3}{2}t^2 - t + 1$$

Position, hastighet, acceleration och fart

Position på x-axeln vid tid t: $x(t)$

Hastighet vid tid t: $v(t) = x'(t)$

Acceleration vid tid t: $a(t) = v'(t) = x''(t)$

OBS! Sträcka, hastighet och acceleration kan vara **negativa**.

Fart

Farten ges av $|v(t)|$, dvs det som man läser av på bilens "fartmätare" (alltid positiv).

Hastighet, acceleration och fart, forts.

hastigheten	**accelerationen**	**vi rör oss**	**farten**
positiv	positiv	åt höger	ökar
positiv	negativ	åt höger	minskar
negativ	positiv	åt vänster	minskar
negativ	negativ	åt vänster	ökar

Exempel

Ett objekt, P, rör sig efter x-axeln enligt

$$x(t) = 2\,t^3 - 15\,t^2 + 24\,t \quad [m]$$

Bestäm

(a) hastighet och acceleration

(b) riktning och fart vid $t = 2s$.

(c) Vid vilket ögonblick står P still?
Vid vilket ögonblick är hastigheten konstant?

(d) När rör sig P åt höger, resp. vänster?

(e) När ökar/minskar farten?

Exempel

Ett objekt kastas (vid $t = 0$) uppåt från ett hustak 10 m över marken, och faller sedan ned till marken. Objektets höjd över marken ges av

$$y(t) = -4.9 \cdot t^2 + 8 \cdot t + 10 \quad [m]$$

(a) Hur högt når objektet innan det faller till marken?

(b) Med vilken hastighet träffar det marken?

Exempel

En boll kastas ned från en klippavsats med begynnelsehastighet 6 m/s.
Marken nås efter 5 s.
Hur hög är klippavsatsen?