M0029M – Differentialkalkyl – Lektion 21 & 22

Ove Edlund

2017-09-25

Ett-till-ett funktion, Invers funktion

Definition

En funktion kallas **ett-till-ett** om

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$$

ett-till-ett = injektiv = omvändbar
villkoret ovan är ekvivalent med $x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \neq f(x_2)$

Definition

Om f är ett-till-ett, så finns en **invers funktion** f^{-1}, som uppfyller

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y)$$

då $x \in D_f$ och $y \in R_f$.

Ett-till-ett funktion

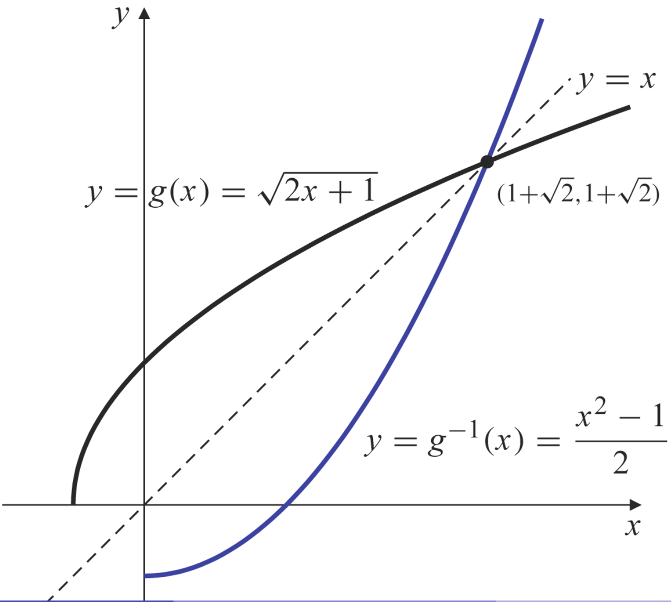
Vi undersöker om en funktion $f(x)$ är ett-till-ett på något av de följande sätten

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$$

eller

Om funktionen $f(x)$ är kontinuerlig på ett sammanhängande intervall, så är den ett-till-ett på intervallet om den är **strängt växande** eller **strängt avtagande**, dvs om $f'(x)$ har samma tecken i hela intervallet.

Exempel



Egenskaper hos inversa funktioner

1. $y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y)$
2. Värdemängden för f är **lika med** definitionsmängden för f^{-1}.
3. Värdemängden för f^{-1} är **lika med** definitionsmängden för f.
4. $f^{-1}(f(x)) = x$ för alla $x \in D_f$
5. $f(f^{-1}(x)) = x$ för alla $x \in D_{f^{-1}}$
6. $\left(f^{-1}\right)^{-1}(x) = f(x)$ för alla $x \in D_f$
7. Grafen för f^{-1} är speglingen av grafen för f i $y = x$.

Derivatan till inversa funktioner

Om uttrycket för $y = f^{-1}(x)$ är okänt eller besvärligt kan följande teknik utnyttjas för att finna derivatan:

Derivatan till invers funktion

Derivatan till inversa funktionen $y = f^{-1}(x)$ kan erhållas genom att bilda $x = f(y)$ och derivera implicit för att finna $\frac{dy}{dx}$.

Detta kan också uttryckas enligt:

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$