M0029M – Differentialkalkyl – Lektion 24

Ove Edlund

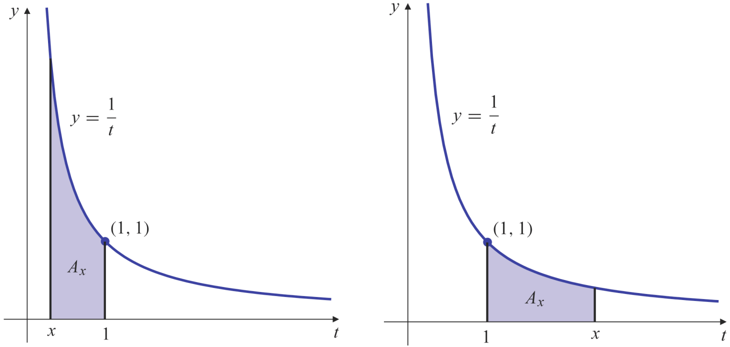
2017-09-29

Naturlig logaritm

Definition; Naturlig logaritm

För $x > 0$ låt A_x vara arean under kurvan $\frac{1}{t}$ då t begränsas av $t = 1$ och $t = x$. Då definieras funktionen $\ln x$ enligt

$$\ln x = \begin{cases} A_x, & \text{då} \quad x \geq 1 \\ -A_x, & \text{då} \quad 0 < x < 1 \end{cases}$$



Naturlig logaritm, forts

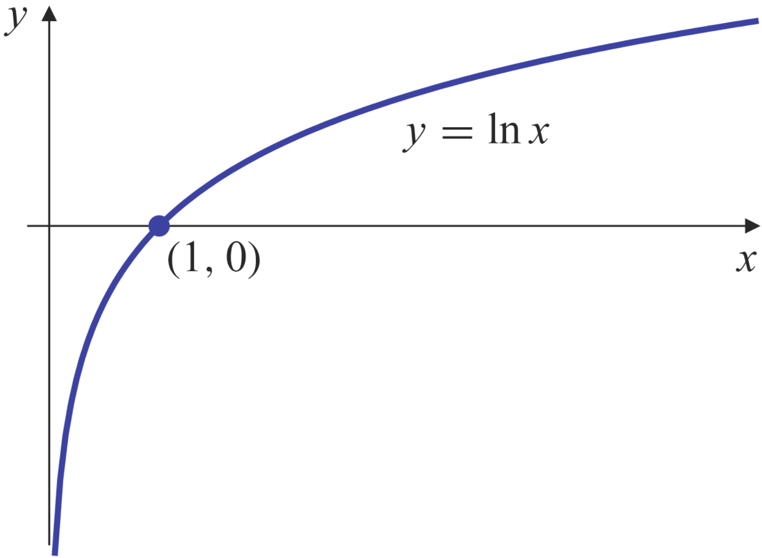
Alternativt kan vi definiera enligt (om vi känner till bestämda integraler)

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt, \quad \text{då } x > 0$$

Konsekvenser av definitionen

- $\ln 1 = 0$
- $\ln x > 0$, då $x > 1$
- $\ln x < 0$, då $0 < x < 1$
- $\ln x$ är ett-till-ett

Naturlig logaritm, graf



Mer egenskaper hos $\ln x$

Sats

För $x > 0$ gäller

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

Sats

Egenskaper hos $\ln x$

i $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$

ii $\ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln y$

iii $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$

iv $\ln(x^r) = r\ln x$

I punkt iv är r ett rationellt tal.

Exponentialfunktionen

Inversfunktionen till $\ln x$ kallas $\exp x$, och definieras därmed implicit av $\ln x$ enligt

$$y = \exp x \Leftrightarrow x = \ln y, \text{ där } y > 0$$

Av detta följer att

- $\exp 0 = 1$
- $\ln(\exp x) = x$
- $\exp(\ln x) = x, x > 0$

Sats

Egenskaper hos $\exp x$

i $(\exp x)^r = \exp(r \cdot x)$

ii $\exp(x + y) = (\exp x)(\exp y)$

iii $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp x}$

iv $\exp(x - y) = \dfrac{\exp x}{\exp y}$

I punkt i är r ett rationellt tal.

Exponentialfunktionen

Låt $e = \exp 1 \approx 2.71828182846$

För rationella tal r gäller

$$\exp r = \exp(1 \cdot r) = (\exp 1)^r = e^r$$

Det verkar logiskt att **definiera**

$$e^x = \exp x, \text{ för reella } x$$

Därmed är $e^x = \exp x$ en exponentialfunktion av typen a^x med bas $a = e$, men definierad för mer än rationella x. Och inversfunktionen $\ln x$ är en logaritm med basen $a = e$, dvs $\ln x = \log_e x$.

Samma sats igen

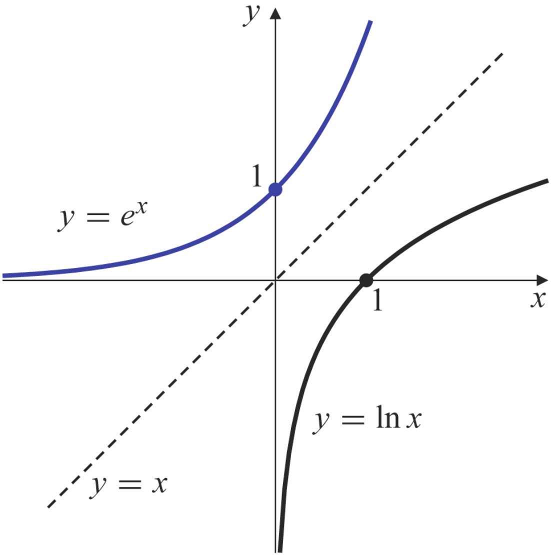
i $(e^x)^y = e^{x \cdot y}$

ii $e^{x+y} = e^x e^y$

iii $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$

iv $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$

Graf över e^x och $\ln x$



Mer om e^x

Derivatan till e^x

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \qquad \text{och} \qquad \int e^x\,dx = e^x + C$$

Ny definition a^x

Vi definierar $\quad a^x = e^{x \ln a} \quad$ då $a > 0$ och $x \in \mathbb{R}$

därmed försvinner begränsningen att x måste vara rationell. Det ger också

- $\dfrac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$
- $\dfrac{d}{dx}x^a = a\,x^{a-1}$