M0029M – Differentialkalkyl – Lektion 28

Ove Edlund

2017-10-04

Metod, kopplade hastigheter

Metod, kopplade hastigheter

1. Rita figur
2. Identifiera matematiska/fysikaliska storheter
3. Formulera samband mellan storheterna
4. Derivera (implicit)
5. Sätt in kända värden
6. Rimligt resultat?

Några exempel

Exempel 1

Ett flygplan flyger horisontellt på 5 kilometers höjd i 600 km/h. Flygplanet passerar rakt över en radiofyr. Hur snabbt ökar avståndet mellan flygplanet och radiofyren 1 minut efter att planet har passerat den?

Exempel 3

Ett fyrtorn ligger på en liten kobbe 2 km från en lång spikrak strand. Fyrtornets lampa snurrar 3 varv per minut. Hur snabbt rör sig "ljusstrålen" från fyrtornets lampa utmed stranden, 4 km från den punkt på stranden som är närmast fyrtornet?

Exempel 4

En kon-formad vattentank med höjd 5 meter och största bredd 4 meter tappas på vatten i den spetsiga botten. När vattenytans höjd är 4 meter, rinner vattnet ut med $\frac{1}{12}$ m^3/min. Hur snabbt minskar då vattenytans höjd?

Definition av Största och minsta värde

En funktion f antar sitt **största värde** $f(x_0)$ i punkten x_0 i definitionsmängden, om
$$f(x) \leq f(x_0)$$
för alla x i definitionsmängden.

En funktion f antar sitt **minsta värde** $f(x_1)$ i punkten x_1 i definitionsmängden, om
$$f(x) \geq f(x_1)$$
för alla x i definitionsmängden.

Största och minsta värden kallas **extremvärden**

Existens av extremvärden

Sats – Existens av extremvärden

Om funktionen f är *kontinuerlig* och definitionsmängden är *sluten* och *begränsad*,
så antas största och minsta värdet av f för punkter i definitionsmängden.

Definition av lokala maxima och minima

En funktion f har ett **lokalt maximum** $f(x_0)$ i punkten x_0 om

$$f(x) \leq f(x_0)$$

för alla x som är nära x_0.
Det existerar $h > 0$ så att $f(x) \leq f(x_0)$ för de $x \in D_f$ som uppfyller att $|x - x_0| < h$.

En funktion f har ett **lokalt minimum** $f(x_1)$ i punkten x_1 om

$$f(x) \geq f(x_1)$$

för alla x som är nära x_1.
Det existerar $h > 0$ så att $f(x) \geq f(x_1)$ för de $x \in D_f$ som uppfyller att $|x - x_1| < h$.

OBS! OBS! OBS!

Om f är deriverbar i ett lokalt maximum eller minimum så är derivatan NOLL där.

Identifiering av lokala extremvärden

Sats – Identifiering av lokala extremvärden

Om funktionen f är definierad på intervallet I och har ett **lokalt maximum** eller **lokalt minimum** i punkten $x_0 \in I$, så är x_0 antingen

1. en **stationär punkt**, dvs $f'(x_0) = 0$,
2. en **singulär punkt för derivatan**, dvs f är ej deriverbar i x_0,
3. eller en **ändpunkt** på intervallet I.