M0029M – Differentialkalkyl – Lektion 29 & 30

Ove Edlund

2017-10-06

Extremvärde i öppna intervall

Sats: Existens av extremvärde i öppna intervall

Om f är kontinuerlig i det öppna intervallet (a, b), och om

$$\lim_{x \to a+} f(x) = L \quad \text{och} \quad \lim_{x \to b-} f(x) = M$$

så gäller följande:

i. Om det existerar ett $u \in (a, b)$ så att $f(u) > L$ och $f(u) > M$, så antar f sitt största värde i intervallet (a, b).

ii. Om det existerar ett $v \in (a, b)$ så att $f(v) < L$ och $f(v) < M$, så antar f sitt minsta värde i intervallet (a, b).

Denna sats gäller även då $a = -\infty$ och/eller $b = \infty$.

Konvex, konkav, inflexionspunkt

Definition: konvex, konkav

En funktion är **konvex** i de punkter där *derivatan* är strängt växande.

En funktion är **konkav** i de punkter där *derivatan* är strängt avtagande.

Definition: Inflexionspunkt

I en **inflexionspunkt** x_0

1. har funktionen $f(x)$ en tangentlinje
2. är funktionen konkav på ena sidan om x_0 och konvex på andra.

Andraderivator

Sats: Konkavitet och andraderivator

$f''(x) > 0$ på I $\Rightarrow$ f är konvex på I.

$f''(x) < 0$ på I $\Rightarrow$ f är konkav på I.

x_0 inflexionspunkt och $f''(x_0)$ existerar $\Rightarrow$ $f''(x_0) = 0$.

Sats: Andraderivatatestet

Om $f'(x_0) = 0$ och $f''(x_0) < 0$ så är x_0 ett lokalt maximum.

Om $f'(x_0) = 0$ och $f''(x_0) > 0$ så är x_0 ett lokalt minimum.

Asymptoter

Om
$$\lim_{x \to a-} f(x) = \pm\infty \quad \text{eller} \quad \lim_{x \to a+} f(x) = \pm\infty$$
så har $y = f(x)$ en **lodrät asymptot** i $x = a$.

Om
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \quad \text{eller} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$
så har $y = f(x)$ en **vågrät asymptot** i $y = L$.

Om
$$\lim_{x \to \infty} f(x) - (a\,x + b) = 0$$
eller
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - (a\,x + b) = 0$$
så har $y = f(x)$ en **lutande asymptot** utefter linjen $y = ax + b$.

Lutande asymptoter

En lutande asymptot utefter linjen $y = ax + b$, som uppfyller

$$\lim_{x \to \infty} f(x) - (a\,x + b) = 0$$

existerar om, och endast om, både a och b kan bestämmas med hjälp av följande gränsvärden

- $a = \lim_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$
- $b = \lim_{x \to \infty} f(x) - a\,x$

Om (minst) ett av dessa gränsvärden ej existerar så finns ingen lutande asymptot.

Detta gäller även på motsvarande sätt då $x \to -\infty$.

Rita grafer

Undersök:

Asymptoter

Lokala extrempunkter

Konkavitet

(Skärningspunkter med axlarna)

(Symmetrier (jämn/udda funktion))