M0029M – Differentialkalkyl – Lektion 33

Ove Edlund

2017-10-12

Exempel: Newtons metod

Vi söker ett nollställe till, $f(x) = x - e^{-x}$

mha Newton-steget, $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n - e^{-x_n}}{1 + e^{-x_n}}$$

n	x_n
0	1.000000000000000000000000000000
1	0.537882842739990241497681516355
2	0.566986991405413238841786634250
3	0.567143285989122944031568153491
4	0.567143290409783869463836354622
5	0.567143290409783872999968662210
6	0.567143290409783872999968662211
7	0.567143290409783872999968662210

Eftersom $f(x_7) = 10^{-30} \approx 0$ ser vi att x_7 är en god approximation till nollstället.

Newtons metod

Vi finner ett närmevärde till det x som löser $f(x) = 0$ genom att utföra en sekvens av Newton-steg:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

- Metoden kräver att derivatan är känd och existerar.
- Vi behöver en startgissning x_0.
- Om vi har ett dåligt startvärde så kan metoden spåra ur.
- Om vi är nära lösningen, och $|f'(x)|$ ej är för liten och $|f''(x)|$ ej är för stor, så fördubblas antalet korrekta värdesiffror i varje upprepning (iteration).

Exempel: Newtons metod

Vi söker ett nollställe till, $f(x) = x^3$

mha Newton-steget, $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3}{3\,x_n^2}$$

n	x_n
0	1.0000000000000000000000000000
1	0.6666666666666666666666666667
2	0.4444444444444444444444444445
3	0.2962962962962962962962962963
4	0.1975308641975308641975308642
5	0.1316872427983539094650205761
6	0.0877914951989026063100137174
7	0.0585276634659350708733424783
8	0.0390184423106233805822283189
9	0.0260122948737489203881522126

n	x_n
10	0.0173415299158326135921014751
11	0.0115610199438884090614009834
12	0.0077073466292589393742673222
13	0.0051382310861726262495115482
14	0.0034254873907817508330076988
15	0.0022836582605211672220051325
16	0.0015224388403474448146700883
17	0.0010149592268982965431133922
18	0.0006766394845988643620755948
19	0.0004510929897325762413837299

Beteendet kommer sig av att derivatan är 0 i lösningspunkten $x = 0$.

Exempel: Fixpunktsiteration

Vi försöker lösa ekvationen $x = e^{-x}$

mha Fixpunktsiterationen, $x_{n+1} = e^{-x_n}$

n	x_n
0	1.0000000000000000000000000000
1	0.367879441171442321595523770161
2	0.692200627555346353865421997183
3	0.500473500563636840545134901338
4	0.606243535085597346445972661974
5	0.545395785975027002610643165632
6	0.579612335503378837119858350940
7	0.560115461361089146440874063922
8	0.571143115080177004211074239940
9	0.564879347391049500816760325022

n	x_n
10	0.568428725029060746894729941047
11	0.566414733146883288667733726103
12	0.567555637328283478344566198874
13	0.566908911921495284961475935176
14	0.567276232175569604228955190904
15	0.567067898390788369090397246824
16	0.567186050099357030601939738899
17	0.567119040057214920342021452246
18	0.567157044001297473795519677217

Den närmar sig lösningen, uppenbarligen. . .

Fixpunktsiteration

- Iterationssteget i fixpunktsiterationen skapas genom att lösa ut en obekant ur ekvationen som ska lösas. Ekvationen blir då på formen

  $$x = g(x).$$

  Iterationssteget bildas sedan genom att sätta

  $$x_{n+1} = g(x_n).$$

- Den sökta punkten x^* som uppfyller $x^* = g(x^*)$ kallas **fixpunkten**.
- Fixpunktsiterationen

  $$x_{n+1} = g(x_n)$$

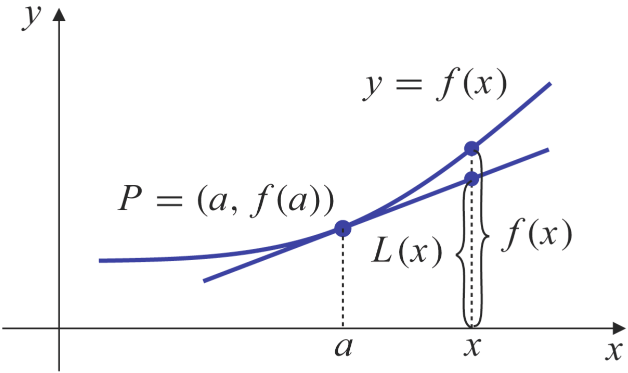
  "konvergerar" (närmar sig lösningen) om $|g'(x)| \leq K < 1$ i ett intervall som innehåller alla x_n.

Linjära approximationer

Tangentlinjen till funktionen $f(x)$, som går genom $(a, f(a))$, dvs

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

kallas **linjäriseringen** eller **linjära approximationen** till $f(x)$ i $x = a$.



Felet i linjär approximation

Felets storlek ges av

$$\text{felet} = \text{rätta värdet} - \text{approximerade värdet}$$

dvs

$$\begin{aligned} E(x) &= f(x) - L(x) \\ &= f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) \end{aligned}$$

OBS! $E(a) = 0$. Varför?
OBS! Felet kan bli negativt...

Vi kan också skriva

$$\begin{aligned} f(x) &= L(x) + E(x) \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + E(x) \end{aligned}$$

Felanalys av linjär approximation

Sats: Felet i linjära approximationer

Om $L(x)$ är en linjärisering av $f(x)$ i punkten $x = a$, och $f''(x)$ existerar för alla värden mellan x och a,
så existerar ett s mellan x och a så att felet i linjäriseringen ges av

$$E(x) = \frac{f''(s)}{2}(x-a)^2.$$

Om vi vet att $f''(x)$ är begränsad, så ger satsen en övre gräns på felets storlek. Dvs

$$|E(x)| \le \frac{1}{2} \max_{t \in I} |f''(t)| (x-a)^2$$

där I är intervallet mellan x och a.