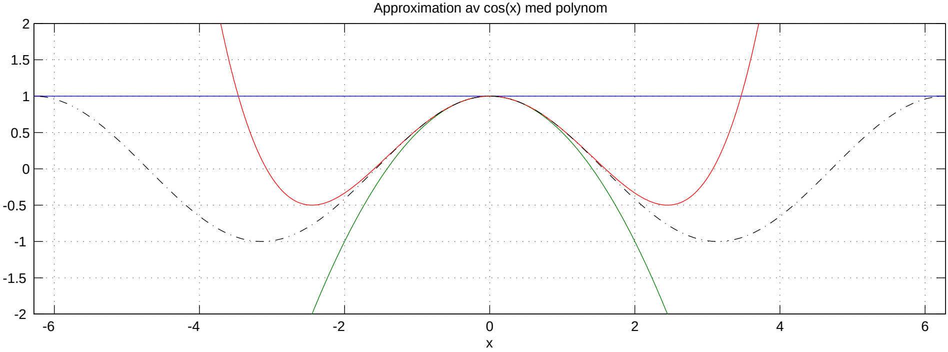
M0029M – Differentialkalkyl – Lektion 34 & 35

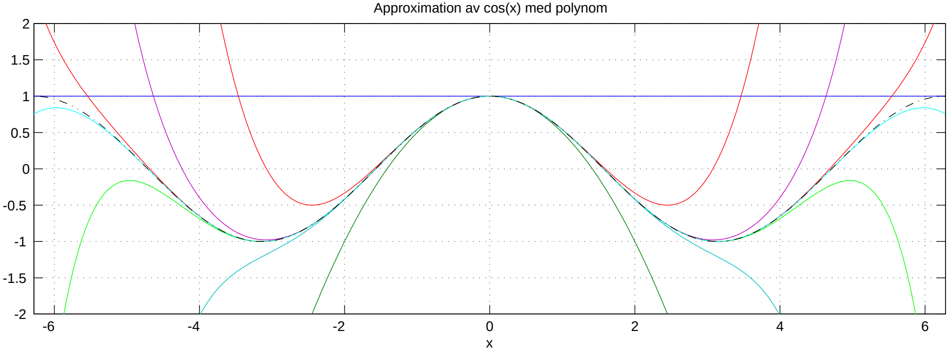
Ove Edlund

2017-10-13

Ex: Approximation av $\cos x$ med polynom



Ex: Approximation av $\cos x$ med polynom



Taylorpolynom

Taylorpolynom av grad n har samma 1:a, 2:a, 3:e, ända upp till n:te derivata som funktionen $f(x)$ i punkten $x = a$. Taylorpolynomet av grad n ges av

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Vi kan också skriva Taylorpolynomet med summatecken

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Felanalys

Felets storlek i Taylorpolynom ges av Taylors formel.

Sats: Taylors formel

Om en funktion f är $n+1$ gånger kontinuerligt deriverbar så gäller

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + E_n(x)$$

dvs

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x).$$

där felet $E_n(x)$ ges av "Lagranges restterm"

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)}$$

för någon punkt s mellan a och x.

Stora ordo: O

Notationen

$$f(x) = P_n(x) + O\big((x-a)^{(n+1)}\big)$$

innebär att termerna som **ej tas med** i polynomet $P_n(x)$ går mot noll ($\to 0$) **lika snabbt** som $(x-a)^{(n+1)}$ går mot noll, då $x \to a$.

OBS!!! Detta ger ingen information om felets **storlek**!

Memorera dessa Taylorpolynom

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots + x^n + O\left(x^{n+1}\right)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + O\left(x^{n+1}\right)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + O\left(x^{n+1}\right)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + O\left(x^{2n+2}\right)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O\left(x^{2n+3}\right)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + O\left(x^{2n+3}\right)$$