



Tentamen i: Differentialkalkyl

Ämneskod	M0029M (M0023M)
Tentamensdatum	2015-12-18
Skrivtid	09.00-14.00

Totala antalet uppgifter: 6

Jourhavande lärare: Mikael Stenlund, 9-12.00    Tel: 0920-492877  
Stefan Eriksson 12.-14.00                      0920-493330

Resultatet meddelas via studentportalen senast: 20 arbetsdagar efter tentamensdagen

Tillåtna hjälpmedel: Inga.

*Till alla uppgifterna ska fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, ekvationslösningar och uträkningar får inte vara så knapphändigt presenterade att de blir svåra att följa. Efter varje uppgift anges maximala antalet poäng som ges. Även endast delvis lösta problem kan ge poäng. **Enbart svar ger 0 poäng.***

Betygsgränser:

3 14 – 19

4 20 – 24

5 25 –

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Märk lösningsbladen med namn och personnr.

---

1. Beräkna och förenkla i deluppgift a),b),c)

a)  $\ln(e^{1/2}) + \ln(2) - \ln\left(\frac{2}{e}\right)$ , (1p)

b)  $\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ , (1p)

c)  $\frac{d}{dx} \cot^2(x)$ . (2p)

d) Bestäm den konstanta termen i utvecklingen av  $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^9$ . (2p)

2. Beräkna

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2}$ , (1p)

b)  $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{|x + 2|}{x^2 - 4}$ , (2p)

c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ . (2p)

3. En funktion  $f(x)$  har derivatan  $f'(x) = x - 1 - \frac{1}{x - 1}$ . Avgör i vilka intervall funktionen är växande respektive avtagande. (2p)

b) Radioaktivt sönderfall för ett ämne uppfyller följande ekvation  $\frac{dy}{dt} = ky$ ,  $y(0) = y_0$  där  $y$  är mängden av det radiaktiva ämnet vid tiden  $t$ . Tiden  $t$  är angiven i tidsenheten år, och  $y_0$  är mängden av ämnet vid tidpunkt  $t = 0$ . Antag att halveringstiden är 1 år, vilket ger  $k = -\ln(2)$ . Efter hur lång tid räknat från  $t = 0$  återstår en tredjedel av ämnet, dvs.  $\frac{y_0}{3}$ ? (2p)

4. Antag att du flyger drake. Draken flyger hela tiden på höjden 30m. Vid en viss tidpunkt är avståndet till dig och en punkt på marken rakt under draken 40m. Med vilken hastighet måste du släppa ut lina till draken vid denna tidpunkt om draken rör sig från dig parallellt med marken med farten 10m/min? Antag att linan till draken är rak. (5p)

5. Funktionen  $f$  är definierad genom  $f(x) = (x - 1)^{2/3} + (x + 1)^{2/3}$ . Bestäm de punkter som ger det största respektive minsta funktionsvärdet på intervallet  $[-3, 3]$ . Obs. motivera alla påståenden noggrant. (5p)

6. Lös endast en av de tre följande uppgifterna **A**, **B** eller **C**.

**A.** Bevisa med hjälp av definitionen av derivata att om  $f(x)$  är deriverbar i punkten  $x$  och  $f(x) \neq 0$  så gäller

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{f(x)} \right) = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}.$$

Förklara dessutom hur kontinuitet kommer in i beviset. (5p)

**B.** Bevisa med hjälp av medelvärdesatsen att om  $f'(x) = 0$  på intervallet  $(a, b)$  och  $f(x)$  är kontinuerlig på  $[a, b]$  så är funktionen konstant. (5p)

**C.** Bevisa med hjälp av induktion att  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ , för alla positiva heltal  $n$ . (5p)