

Exempel 4

En kon-formad vattentank med höjd 5 meter och största bredd 4 meter tappas på vatten i den spetsiga botten. När vattenytans höjd är 4 meter, rinner vattnet ut med $\frac{1}{12} \text{ m}^3/\text{min}$. Hur snabbt minskar då vattenytans höjd?



Tid:	t [min]
Vattenhöjd:	$h(t)$ [m]
Vattenvolym:	$V(t)$ [m ³]
Radie:	$r(t)$ [m]

samband

$$r = k \cdot h$$

$$\text{Fall} \Rightarrow 2 = k \cdot 5 \Rightarrow k = \frac{2}{5}$$

$$\text{så } \boxed{r = \frac{2}{5}h}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{2}{5}h\right)^2 \cdot h = \frac{4\pi}{75} h^3 \quad (*)$$

Sökes: $h'(t)$ vid den tidpunkt t_0 då $h(t_0) = 4$

Derivera (*) m.a.p. t

$$V'(t) = \frac{4\pi}{75} 3(h(t))^2 \cdot h'(t)$$

$$\text{Då } t = t_0 \text{ är } V'(t_0) = -\frac{1}{12} \quad \text{och } h(t_0) = 4$$

$$-\frac{1}{12} = \frac{4\pi}{75} \cdot \frac{1}{25} \cdot 4^2 \cdot h'(t_0)$$

des.

$$h'(t_0) = -\frac{25}{12 \cdot 4^2 \cdot 4 \cdot \pi} = -\frac{25}{728\pi} \approx -0.0104 \text{ m/min}$$

Svar: Vattenhöjden minskar med $0,0104 \text{ m/min}$