Ett objekt, P, rör sig efter x-axeln enligt

$$x(t) = 2\,t^3 - 15\,t^2 + 24\,t \quad [m]$$

Bestäm

(a) hastighet och acceleration

(b) riktning och fart vid $t = 2s$.

(c) Vid vilket ögonblick står P still?
Vid vilket ögonblick är hastigheten konstant?

(d) När rör sig P åt höger, resp. vänster?

(e) När ökar/minskar farten?

(a) Hastighet $v(t) = x'(t) = 6t^2 - 30t + 24$ $[m/s]$

Acceleration $a(t) = v'(t) = 12t - 30$ $[m/s^2]$

(b) $v(2) = 6 \cdot 4 - 30 \cdot 2 + 24 = -12$ m/s

Fart = 12 m/s, Riktning: vänster

(c) P står still då $v(t) = 0$

$$\Updownarrow \quad 6t^2 - 30t + 24 = 0$$
$$\Updownarrow \quad t^2 - 5t + 4 = 0$$
$$\Updownarrow \quad (t-1)(t-4) = 0$$
$$\Updownarrow \quad t = 1 \text{ eller } t = 4$$

Konstant hastighet då $a(t) = 0$

$$12t - 30 = 0$$
$$t = \frac{30}{12} = \frac{5}{2} = 2{,}5 \text{ s}$$

(d) höger då $v(t) > 0$ vänster då $v(t) < 0$

$$v(t) = 6(t^2 - 5t + 4) = 6(t-1)(t-4)$$

		1		4	
$t-1$	$-$	0	$+$		$+$
$t-4$	$-$		$-$	0	$+$
$v(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Höger då $t > 4$ eller $t < 1$

vänster då $1 < t < 4$

(e) Accelerationens tecken

$$a(t) = 12\left(t - \frac{5}{2}\right)$$

		1		5/2		4	t
$v(t)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$a(t)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
farten	minskar		ökar		minskar		ökar

Ett objekt kastas (vid $t = 0$) uppåt från ett hustak 10 m över marken, och faller sedan ned till marken. Objektets höjd över marken ges av

$$y(t) = -4.9 \cdot t^2 + 8 \cdot t + 10 \quad [m]$$

(a) Hur högt når objektet innan det faller till marken?

(b) Med vilken hastighet träffar det marken?

(a) Objektet vänder nedåt då hastigheten är noll.

$$v(t) = y'(t) = -4,9 \cdot 2 \cdot t + 8 = -9,8 \cdot t + 8$$

$$v(t) = 0 \Leftrightarrow \quad -9.8 \cdot t + 8 = 0$$

$$t = \frac{8}{9.8} \approx 0,8163 \text{ s}$$

Högsta höjd vid den tidpunkten

$$y\left(\frac{8}{9.8}\right) = -4,9\left(\frac{8}{9.8}\right)^2 + 8 \cdot \left(\frac{8}{9.8}\right) + 10 \approx 13.27 \text{ m}$$

(b) Objektet slår i marken då $y(t) = 0$.

$$0 = y(t) = -4,9 \cdot t^2 + 8 \cdot t + 10$$

$$\Updownarrow$$

$$t^2 - \frac{8}{4,9}t - \frac{10}{4,9} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$t = \frac{4}{4,9} (\pm) \sqrt{\frac{16}{4,9^2} + \frac{10}{4,9}} = \frac{4}{4,9} (\pm) \sqrt{\frac{16}{4,9^2} + \frac{49}{4,9^2}}$$

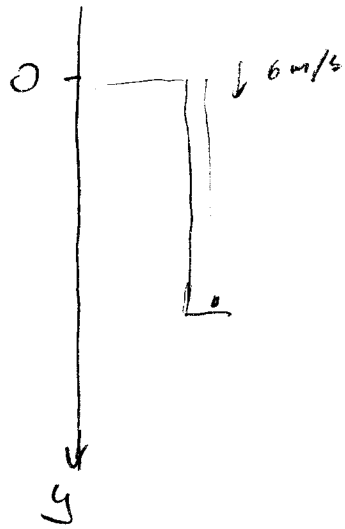
$$= \frac{4 (\pm) \sqrt{65}}{4,9} \approx 2,462$$

Vid den tidpunkten är hastigheten

$$v(2,462) = -9,8 \cdot 2,462 + 8 \approx -16,13 \text{ m/s}$$

(dvs farten är 16,13 m/s)

En boll kastas ned från en klippavsats med begynnelsehastighet 6 m/s.
Marken nås efter 5 s.
Hur hög är klippavsatsen?



Sträcka som bollen färdats $y(t)$
Bollens hastighet $y'(t)$
Bollens acceleration $y''(t)$

Differentialekvation

$$y'' = g \qquad (g = 9.81 \text{ m/s}^2)$$

Begynnelsevillkor

$$y(0) = 0$$
$$y'(0) = 6 \text{ m/s}$$

Allmän lösning

$$y'' = g$$
$$y' = \int g \, dt = g \cdot t + A$$
$$y = \int (g \cdot t + A) \, dt = \frac{1}{2} g t^2 + A t + B$$

Partikulärlösning av begynnelsevillkoren

$$0 = y(0) = \frac{1}{2} g \cdot 0^2 + A \cdot 0 + B \iff \boxed{B = 0}$$
$$6 = y'(0) = g \cdot 0 + A \iff \boxed{A = 6}$$

ger

$$y = \frac{1}{2} g t^2 + 6t$$

Marken nås efter 5 s så klippavsatsens höjd ges av $y(5)$

$$y(5) = \frac{1}{2} g \cdot 5^2 + 6 \cdot 5 = \frac{1}{2} \cdot 9.81 \cdot 5^2 + 6 \cdot 5$$

$$\approx 152,6 \text{ m}$$