M0030M – Lektion 1 & 2

Linjär algebra och integralkalkyl

Ove Edlund

2018-11-05

Avståndsformler

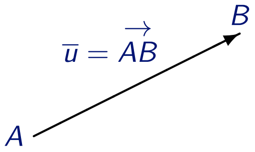
Avståndet r från origo till punkten $P = (x, y, z)$ ges av

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Avståndet s från punkten $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ till punkten $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ges av

$$\begin{aligned} s &= |P_1 P_2| \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \end{aligned}$$

Definition: Vektor



Två punkter A och B binds samman av en **riktad sträcka** från A till B, som betecknas $\overrightarrow{AB}$.

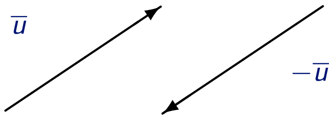
En riktad sträcka kallas en **vektor** $\overline{u}$. Vi skriver $\overline{u} = \overrightarrow{AB}$. Två sträckor som är lika långa och har samma riktning betecknar samma vektor.

En vektor från origo O till en punkt A, dvs $\overrightarrow{OA}$, är liktydigt med punkten A och kallas för **ortsvektor**.

Definition: Vektor, forts

Nollvektorn är den vektor som fås då start- och slutpunkt sammanfaller. Nollvektorn betecknas $\overline{0}$. Vi kan alltså skriva $\overline{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$.

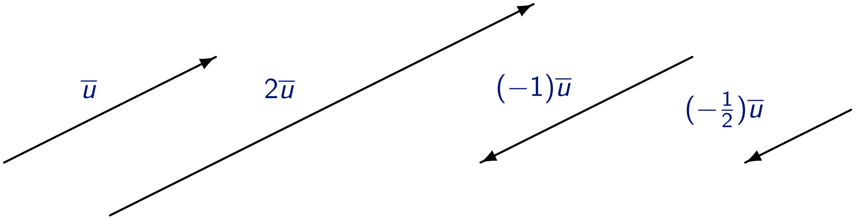
Om $\overline{u} = \overrightarrow{AB}$ så är $-\overline{u}$ den vektor som är lika lång som $\overline{u}$, men riktad åt motsatt håll, dvs $-\overline{u} = \overrightarrow{BA}$.



Längden av vektorn $\overline{u}$ betecknas $\|\overline{u}\|$. Obs! $\|\overline{u}\| = \| - \overline{u}\|$.

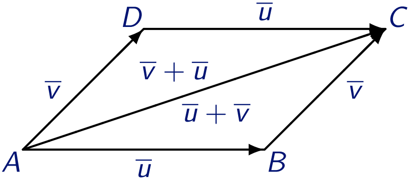
Definition: Multiplikation av vektor med skalär

Om t är ett reellt tal och $\overline{u}$ är en vektor så är $t\,\overline{u}$ den vektor som har längd $|t|\,\|\overline{u}\|$ och samma riktning som $\overline{u}$ om $t > 0$ och motsatt riktning som $\overline{u}$ om $t < 0$.



Definition: Addition av vektorer

Låt $\overline{u}$ och $\overline{v}$ vara två vektorer. Välj tre punkter A, B och C så att $\overline{u} = \overrightarrow{AB}$ och $\overline{v} = \overrightarrow{BC}$. Då är $\overline{u} + \overline{v} = \overrightarrow{AC}$.

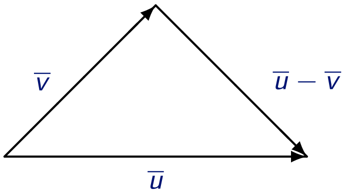


Räkneregler

1. $\overline{u} + \overline{v} = \overline{v} + \overline{u}$
2. $(\overline{u} + \overline{v}) + \overline{w} = \overline{u} + (\overline{v} + \overline{w})$
3. $\overline{u} + \overline{0} = \overline{u}$
4. $t(\overline{u} + \overline{v}) = t\overline{u} + t\overline{v}$
5. $(s + t)\overline{u} = s\overline{u} + t\overline{u}$
6. $s(t\overline{u}) = (s\,t)\overline{u}$

Definition: Subtraktion av vektorer

Subtraktion definieras av $\overline{u} - \overline{v} = \overline{u} + (-\overline{v})$.



(Tänk: $\overline{v} + (\overline{u} - \overline{v}) = \overline{v} + \overline{u} - \overline{v} = \overline{u}$)

Obs! $\overline{u} - \overline{u} = \overline{0}$

Vektorn $\overline{u} = \overrightarrow{AB}$

Vektorn $\overline{u} = \overrightarrow{AB}$ mellan punkterna $A = (x_1, y_1, z_1)$ och $B = (x_2, y_2, z_2)$, ges av

$$\overline{u} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}$$

(Adams $\overline{u} = \mathbf{i}(x_2 - x_1) + \mathbf{j}(y_2 - y_1) + \mathbf{k}(z_2 - z_1)$)

Vektoraddition

$$\overline{u} + \overline{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{bmatrix}$$

$$\overline{u} + \overline{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{bmatrix}$$

Multiplikation med skalär

$$\alpha\,\overline{u} = \alpha \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\, u_1 \\ \alpha\, u_2 \end{bmatrix}$$

$$\alpha\,\overline{u} = \alpha \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\, u_1 \\ \alpha\, u_2 \\ \alpha\, u_3 \end{bmatrix}$$

Längden (= normen) av en vektor

I två dimensioner

$$\|\overline{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

I tre dimensioner

$$\|\overline{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

(Adams använder beteckningen $|\overline{u}|$)

Enhetsvektorer

Basvektorer i två dimensioner:

$$\hat{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \hat{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Basvektorer i tre dimensioner:

$$\hat{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \hat{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \hat{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(Adams: $\hat{e}_1 = \mathbf{i}, \quad \hat{e}_2 = \mathbf{j}, \quad \hat{e}_3 = \mathbf{k}$)

Enhetsvektor i riktningen $\overline{v}$:

$$\hat{e}_{\overline{v}} = \frac{1}{\|\overline{v}\|}\overline{v}$$

Skalärprodukt

Definition

$$\overline{u} \bullet \overline{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

$$\overline{u} \bullet \overline{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Egenskaper

$$\begin{aligned}
&\overline{u} \bullet \overline{v} = \overline{v} \bullet \overline{u} \\
&\overline{u} \bullet (\overline{v} + \overline{w}) = \overline{u} \bullet \overline{v} + \overline{u} \bullet \overline{w} \\
&\alpha(\overline{u} \bullet \overline{v}) = (\alpha\, \overline{u}) \bullet \overline{v} = \overline{u} \bullet (\alpha\, \overline{v}) \\
&\overline{u} \bullet \overline{u} = \|\overline{u}\|^2
\end{aligned}$$

Vinkel mellan vektorer

Sats: Vinkel mellan vektorer

Om θ är vinkeln mellan vektorerna $\overline{u}$ och $\overline{v}$ gäller att

$$\overline{u} \bullet \overline{v} = \|\overline{u}\| \|\overline{v}\| \cos\theta \ .$$

Speciellt gäller att

$$\overline{u} \bullet \overline{v} = 0$$

om och endast om $\overline{u}$ och $\overline{v}$ är **ortogonala** (dvs vinkelräta).

Ortogonal projektion

Skalärprojektionen s av $\overline{u}$ på $\overline{v}$ ges av:

$$s = \frac{\overline{u} \bullet \overline{v}}{\|\overline{v}\|} \ .$$

Vektorprojektionen $\overline{u}_{\overline{v}}$ av $\overline{u}$ på $\overline{v}$ ges av:

$$\overline{u}_{\overline{v}} = \frac{\overline{u} \bullet \overline{v}}{\|\overline{v}\|}\hat{e}_{\overline{v}} = \frac{\overline{u} \bullet \overline{v}}{\|\overline{v}\|^2}\overline{v} \ .$$

Längden av vektorprojektionen är $\|\overline{u}_{\overline{v}}\| = |s|$.