M0030M – Lektion 12

Linjär algebra och integralkalkyl

Ove Edlund

2018-11-21

Linjärt (o)beroende

En uppsättning vektorer är linjärt beroende om någon av dem kan beskrivas som en linjärkombination av de andra. Detta formuleras enligt:

Definition: Linjärt beroende

Vektorerna $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_p$ är **linjärt beroende** om det existerar värden $x_1, x_2, \ldots, x_p$ som inte alla är noll, så att

$$x_1\,\overline{v}_1 + x_2\,\overline{v}_2 + \cdots + x_p\,\overline{v}_p = \overline{0}.$$

Om det ovanstående inte gäller, dvs

$$x_1\,\overline{v}_1 + x_2\,\overline{v}_2 + \cdots + x_p\,\overline{v}_p = \overline{0}.$$

endast är uppfyllt om alla $x_1, x_2, \ldots, x_p$ är noll, säger vi att vektorerna är **linjärt oberoende**.

Linjärt (o)beroende, forts

Enligt definitionen av matris-vektor-multiplikation kan villkoret omformuleras enligt

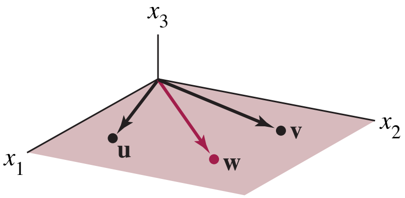
$$\underbrace{\begin{bmatrix} \overline{v}_1 & \overline{v}_2 & \dots & \overline{v}_p \end{bmatrix}}_{=\boldsymbol{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}}_{=\overline{x}} = \overline{0}$$

dvs ett homogent ekvationssystem $\boldsymbol{A}\overline{x} = \overline{0}$.

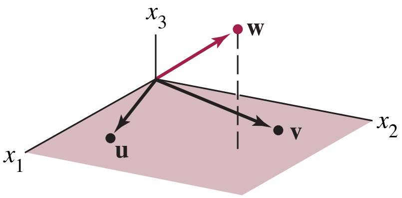
Om endast den triviala lösningen $\overline{x} = \overline{0}$ existerar är kolonnerna linjärt oberoende,

annars är de linjärt beroende.

Exempel: Linjärt beroende i $\mathbb{R}^3$



Linearly dependent,
w in Span{**u**, **v**}



Linearly independent,
w *not* in Span{**u**, **v**}

Linjärt beroende, Satser

Sats

Givet ett antal vektorer $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_p$ som alla har dimension $\mathbb{R}^n$:

Om antalet vektorer p är större än vektorernas dimension n, (dvs $p > n$)

så är vektorerna linjärt beroende.

Sats

Givet ett antal vektorer $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_p$ som alla har dimension $\mathbb{R}^n$:

Om en av dem är nollvektorn, dvs $\overline{v}_k = \overline{0}$ för något k,

så är vektorerna linjärt beroende.

Exempel

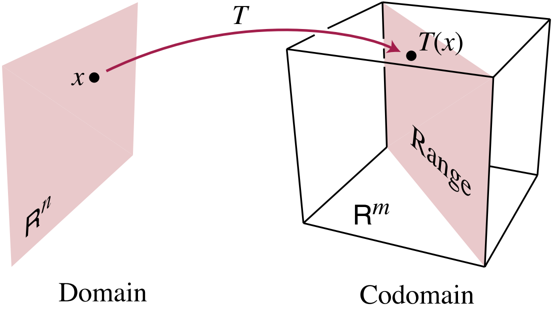
Avgör om följande vektorer är linjärt beroende, genom att stirra på dem en stund.

1. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} -3 \\ -6 \\ 3 \\ -9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}$

Linjär avbildning $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$



definitionsmängd	$=$	domain
målmängd	$=$	codomain
värdemängd	$=$	range

Exempel

Givet en matris

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

så definierar vi en linjär avbildning $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ enligt

$$T(\overline{x}) = \boldsymbol{A}\,\overline{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

1. Bestäm bilden av $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ med T.
2. Bestäm $\overline{x}$ så att T avbildar $\overline{x}$ på $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Exempel, forts

3. Finns det mer än ett $\overline{x}$ som avbildas på $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$?

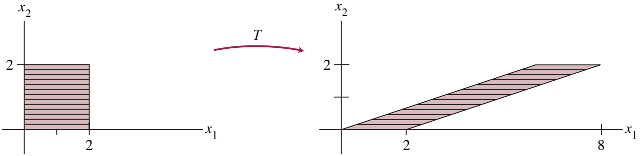
4. Avgör om $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ligger in värdemängden för T.

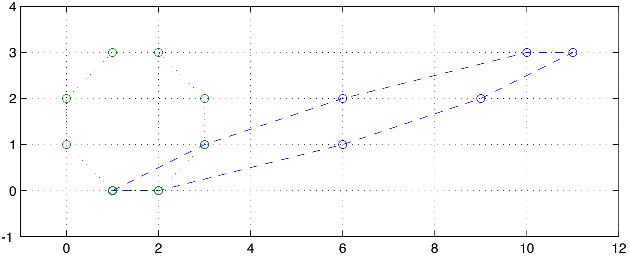
Exempel: Skjuvning

Den linjära avbildningen $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definierad av

$$T(\overline{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

beskriver en **skjuvning**. Skjuvning är ett viktigt begrepp i bl.a. fysik.





Definition: Linjär avbildning

En avbildning T är linjär om

1. $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ för alla $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ i definitionsmängden för T.
2. $T(c\,\mathbf{u}) = c\,(T(\mathbf{u}))$ för alla $\mathbf{u}$ och skalärer c.

Definitionen leder till följande egenskaper:

$$
\begin{aligned}
&T(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \\
&T(c\,\mathbf{u} + d\,\mathbf{v}) = c\,T(\mathbf{u}) + d\,T(\mathbf{v}) \\
&T(c_1\,\mathbf{v}_1 + c_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + c_p\,\mathbf{v}_p) \\
&\qquad = c_1\,T(\mathbf{v}_1) + c_2\,T(\mathbf{v}_2) + \cdots + c_p\,T(\mathbf{v}_p)
\end{aligned}
$$