M0030M – Lektion 13

Linjär algebra och integralkalkyl

Ove Edlund

2018-11-22

Sats: Linjär avbildnings-matris

Låt $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ vara en linjär avbildning. Då existerar en *unik* matris $\boldsymbol{A}$ så att

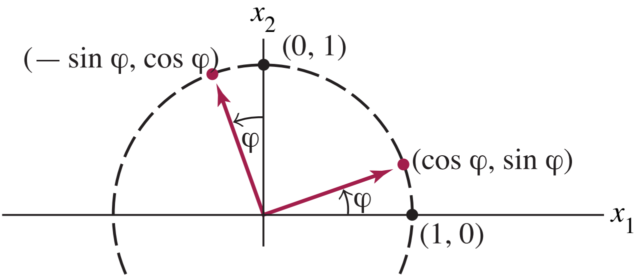
$$T(\overline{x}) = \boldsymbol{A}\,\overline{x}, \quad \text{för alla} \quad \overline{x} \in \mathbb{R}^n.$$

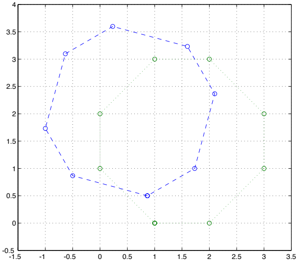
Matrisen $\boldsymbol{A}$ har dimension $m \times n$, och kolonn k ges av $T(\hat{e}_k)$, där $\hat{e}_k$ är kolonn k i enhetsmatrisen $\boldsymbol{I}_n$. Dvs

$$\boldsymbol{A} = \Big[\, T(\hat{e}_1) \;\; T(\hat{e}_2) \;\; \ldots \;\; T(\hat{e}_n) \,\Big]$$

Exempel

Bestäm matrisen för den linjära avbildningen $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ som utför rotation runt origo med vinkeln φ.





Exempel

Låt den linjära avbildningen $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ges av

$$T(\overline{u}) = \hat{e}_1 \times \overline{u}.$$

Bestäm avbildningsmatrisen och bilden av en godtycklig vektor.

Exempel

Låt $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ vara den avbildning som utför ortogonal projektion på linjen

$$x - 2\,y = 0.$$

Bestäm avbildningsmatrisen.

Definition

Den linjära avbildningen $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ är

på (onto) om värdemängden är hela $\mathbb{R}^m$. Dvs om varje $\overline{y} \in \mathbb{R}^m$ ges av $\overline{y} = T(\overline{x})$ för något $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$.

ett-till-ett (one-to-one) om varje $\overline{y}$ i avbildningen $\overline{y} = T(\overline{x})$ endast ges av ett $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$.
(Dvs $T(\overline{u}) = T(\overline{v}) \ \Rightarrow \ \overline{u} = \overline{v}$.)

Sats: *ett-till-ett*-avbildningar

Den linjära avbildningen $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ är *ett-till-ett* om och endast om $T(\overline{x}) = \overline{0}$ bara har den triviala lösningen $\overline{x} = \overline{0}$.

(Dvs om och endast om kolonnerna i avbildningsmatrisen är linjärt oberoende).

Det innebär också att $\boldsymbol{A}$ är *ett-till-ett* om och endast om $\boldsymbol{A}$ har en pivåposition i varje kolonn.

Sats: *på*-avbildningar

Den linjära avbildningen $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ med avbildningsmatris $\boldsymbol{A}$ är *på* om och endast om det linjära höljet till kolonnerna i $\boldsymbol{A}$ är lika med $\mathbb{R}^m$.

Det innebär också att $\boldsymbol{A}$ är *på* om och endast om $\boldsymbol{A}$ har en pivåposition på varje rad.