M0030M – Lektion 14

Linjär algebra och integralkalkyl

Ove Edlund

2018-11-23

Matriser

Matriser delas in i rader och kolonner. En $m \times n$-matris (m rader och n kolonner) med obestämda element skrivs

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Elementet på rad i och kolonn j benämns a_{ij}.
Diagonalelementen $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots$ bildar matrisens **huvuddiagonal**:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} & a_{34} \end{bmatrix}.$$

En matris som endast består av nollor kallas **nollmatris** och skrivs $\mathbf{0}$.

Matrisaddition

Matriser med **lika många rader** och **lika många kolonner** adderas elementvis. Dvs om $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$, så bildas alla element i $\boldsymbol{C}$ av $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Ex:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \\ a_{41}+b_{41} & a_{42}+b_{42} & a_{43}+b_{43} \end{bmatrix}$$

Multiplikation med skalär

Om $\boldsymbol{B} = k\,\boldsymbol{A}$, så bildas alla element i $\boldsymbol{B}$ av $b_{ij} = k\,a_{ij}$. Ex:

$$k \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\,a_{11} & k\,a_{12} & k\,a_{13} \\ k\,a_{21} & k\,a_{22} & k\,a_{23} \\ k\,a_{31} & k\,a_{32} & k\,a_{33} \end{bmatrix}$$

Egenskaper

Om matriserna $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ och $\boldsymbol{C}$ har samma dimensioner, och r och s är skalärer, så gäller följande samband

1. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$
2. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$
3. $\boldsymbol{A}+\mathbf{0}=\boldsymbol{A}$
4. $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=r\boldsymbol{A}+r\boldsymbol{B}$
5. $(r+s)\boldsymbol{A}=r\boldsymbol{A}+s\boldsymbol{A}$
6. $r(s\boldsymbol{A})=(rs)\boldsymbol{A}$

Matrismultiplikation

Om $\boldsymbol{A}$ är en $m \times n$-matris och $\boldsymbol{B}$ är en $n \times p$-matris, så definierar vi produkten mellan $\boldsymbol{A}$ och $\boldsymbol{B}$ som en matris $\boldsymbol{C}$ med storlek $m \times p$ enligt

$$\begin{aligned} \boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} &= \boldsymbol{A}\left[\, \overline{b}_1 \ \overline{b}_2 \ \ldots \ \overline{b}_p \right] \\ &= \left[\, \boldsymbol{A}\overline{b}_1 \ \boldsymbol{A}\overline{b}_2 \ \ldots \ \boldsymbol{A}\overline{b}_p \right] \end{aligned}$$

där $\overline{b}_1, \overline{b}_2, \ldots, \overline{b}_p$ är kolonnerna i $\boldsymbol{B}$.

Matrismultiplikation, smart genväg

Om $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$ så kan vi beräkna elementet i $\boldsymbol{C}$ på rad i och kolonn j genom att ta **skalärprodukten mellan rad i i $\boldsymbol{A}$ och kolonn j i $\boldsymbol{B}$.** dvs

$$\begin{aligned} c_{ij} &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \end{aligned}$$

Egenskaper

Om $\boldsymbol{A}$ är en $m \times n$ matris, och $\boldsymbol{B}$ och $\boldsymbol{C}$ har "lämpliga dimensioner", så gäller följande samband

1. $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$
2. $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$
3. $(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}$
4. $r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = (r\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}(r\boldsymbol{B})$ där r är en skalär
5. $\boldsymbol{I}_m\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_n$

OBS!!! I allmänhet gäller att $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$.

Transponat

Givet en $m \times n$-matris $\boldsymbol{A}$ så definierar vi **transponatet** till $\boldsymbol{A}$ som den $n \times m$-matris $\boldsymbol{A}^T$ som erhålls genom att **byta plats på rader och kolonner**.

Exempelvis om

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

så ges transponatet av

$$\boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

Egenskaper

Om $\boldsymbol{A}$ och $\boldsymbol{B}$ är matriser av "lämpliga storlekar", så gäller följande samband

1. $\left(\boldsymbol{A}^T\right)^T = \boldsymbol{A}$
2. $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{B}^T$
3. $(r\,\boldsymbol{A})^T = r\,\boldsymbol{A}^T$ där r är en skalär
4. $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$

Egenskap 4. kan generaliseras till, exempelvis

$(\boldsymbol{ABCDE})^T = \boldsymbol{E}^T\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$

Matrisinvers

Vi betraktar här endast **kvadratiska matriser**, dvs matriser med lika många rader som kolonner.

Om $\boldsymbol{A}$ är en $n \times n$-matris och det existerar en annan $n \times n$-matris $\boldsymbol{C}$ som uppfyller att

$$\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{I} \quad \text{och} \quad \boldsymbol{CA} = \boldsymbol{I}$$

så säger vi att $\boldsymbol{A}$ är **inverterbar** och har **invers** $\boldsymbol{C}$.

Inversen till $\boldsymbol{A}$ betecknas vanligen $\boldsymbol{A}^{-1}$ och uppfyller alltså

$$\boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{I} \quad \text{och} \quad \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$$

Matrisen $\boldsymbol{A}^{-1}$ är entydigt bestämd, dvs det finns endast **en** invers till varje inverterbar matris.

Sats: Linjära ekvationssystem

Om $\boldsymbol{A}$ är en inverterbar $n \times n$-matris, så har det linjära ekvationsystemet $\boldsymbol{A}\overline{x} = \overline{b}$ entydig lösning för alla $\overline{b} \in \mathbb{R}^n$, och lösningen ges av

$$\overline{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\overline{b}$$

Sats

a. Om $\boldsymbol{A}$ är inverterbar, så är $\boldsymbol{A}^{-1}$ inverterbar och

$$\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1} = \boldsymbol{A}$$

b. Om $\boldsymbol{A}$ och $\boldsymbol{B}$ är inverterbara $n \times n$-matriser, så är $\boldsymbol{AB}$ inverterbar och

$$(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$$

c. Om $\boldsymbol{A}$ är inverterbar, så är också $\boldsymbol{A}^T$ inverterbar och

$$\left(\boldsymbol{A}^T\right)^{-1} = \left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^T$$

Sats

En $n \times n$-matris $\boldsymbol{A}$ är inverterbar *om och endast om* $\boldsymbol{A}$ är radekvivalent med $\boldsymbol{I}_n$.

För inverterbara matriser gäller att varje sekvens av elementära radoperationer som reducerar $\boldsymbol{A}$ till $\boldsymbol{I}_n$, också avbildar $\boldsymbol{I}_n$ på $\boldsymbol{A}^{-1}$.