M0030M – Lektion 15

Linjär algebra och integralkalkyl

Ove Edlund

2018-11-26

Repetition: Matrisaddition och multiplikation

Givet matriserna

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 23 & -2 \\ -2 & -9 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

så är

$$A + B = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & -5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boxed{5} & 23 & -2 \\ -2 & -9 & \boxed{1} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{6} & 25 & -7 \\ -2 & -9 & \boxed{2} \\ 2 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

och

$$AB = \begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{-5} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{5} & 23 & \boxed{-2} \\ \boxed{-2} & -9 & \boxed{1} \\ \boxed{0} & 1 & \boxed{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

Eftersom $AB = I$ är $B = A^{-1}$, dvs B är inversen till A.

Sats

En $n \times n$-matris $\boldsymbol{A}$ är inverterbar *om och endast om* $\boldsymbol{A}$ är radekvivalent med $\boldsymbol{I}_n$.

För inverterbara matriser gäller att varje sekvens av elementära radoperationer som reducerar $\boldsymbol{A}$ till $\boldsymbol{I}_n$, också avbildar $\boldsymbol{I}_n$ på $\boldsymbol{A}^{-1}$.

Repetition: Matrisinvers

Inversen till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

beräknas enligt

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 23 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Repetition: Matrisinvers, forts

Inversen är alltså

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 23 & -2 \\ -2 & -9 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Systemet

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}}_{=A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

löses då av

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 23 & -2 \\ -2 & -9 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{=A^{-1}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Sats: Inverterbarhet

Låt $\boldsymbol{A}$ vara en $n \times n$-matris. Då är de följande påståendena ekvivalenta, dvs om ett är sant så är alla sanna.

a. $\boldsymbol{A}$ är inverterbar.
b. $\boldsymbol{A}$ är radekvivalent med $\boldsymbol{I}_n$.
c. $\boldsymbol{A}$ har n pivåpositioner.
d. Den homogena ekvationen $\boldsymbol{A}\overline{x} = \overline{0}$ har endast den triviala lösningen $\overline{x} = \overline{0}$.
e. Kolonnerna i $\boldsymbol{A}$ är linjärt oberoende.
f. Avbildningen $\overline{x} \mapsto \boldsymbol{A}\overline{x}$ är *ett-till-ett* (one-to-one).
g. $\boldsymbol{A}\overline{x} = \overline{b}$ har lösning för varje $\overline{b}$.
h. Kolonnerna i $\boldsymbol{A}$ spänner upp $\mathbb{R}^n$.
i. Avbildningen $\overline{x} \mapsto \boldsymbol{A}\overline{x}$ är *på* (onto).
j. Det finns en matris $\boldsymbol{C}$ så att $\boldsymbol{C}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_n$.
k. Det finns en matris $\boldsymbol{D}$ så att $\boldsymbol{A}\boldsymbol{D} = \boldsymbol{I}_n$.
l. $\boldsymbol{A}^T$ är inverterbar.

Om $\boldsymbol{A}$ är en $n \times n$-matris som **ej** är inverterbar säger vi att $\boldsymbol{A}$ är **singulär**.

Exempel

Avgör vilka av de följande matriserna som är inverterbara:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Inversa linjära avbildningar

En linjär avbildning $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ har en invers avbildning $T^{-1} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ omm T är både *ett-till-ett* och *på*. Detta kan endast inträffa om $n = m$ och matrisen som beskriver avbildningen är inverterbar.

Dvs med $T(\overline{x}) = \boldsymbol{A}\,\overline{x}$, så existerar T^{-1} omm $\boldsymbol{A}$ är inverterbar, varvid $T^{-1}(\overline{x}) = \boldsymbol{A}^{-1}\,\overline{x}$.