M0030M – Lektion 17

Linjär algebra och integralkalkyl

Ove Edlund

2018-11-28

Definition: determinant

Determinanten till en 1×1-matris är matrisens skalära värde (ex. $\det[5] = 5$).

Determinanten till en $n \times n$-matris, då $n \geq 2$, är en viktad summa av determinanter till n st. $(n-1) \times (n-1)$-matriser enligt formeln

$$\begin{aligned} \det(\boldsymbol{A}) &= a_{11} \det(\boldsymbol{A}_{11}) - a_{12} \det(\boldsymbol{A}_{12}) + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det(\boldsymbol{A}_{1n}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(\boldsymbol{A}_{1j}) \end{aligned}$$

där $\boldsymbol{A}_{ij}$ är den matris som erhålls om rad i och kolonn j tas bort från $\boldsymbol{A}$.

Utveckling efter rad och kolonn

Låt

$$\boldsymbol{C}_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\boldsymbol{A}_{ij})$$

beteckna **kofaktorn** för rad i och kolonn j till matrisen $\boldsymbol{A}$. Då gäller enligt definitionen av determinant

$$\det(\boldsymbol{A}) = a_{11}\,\boldsymbol{C}_{11} + a_{12}\,\boldsymbol{C}_{12} + \cdots + a_{1n}\,\boldsymbol{C}_{1n}.$$

Detta är utvecklingen efter rad 1. Man kan dock utveckla efter en godtycklig rad eller kolonn

Sats

Utveckling efter rad i: $\det(\boldsymbol{A}) = a_{i1}\,\boldsymbol{C}_{i1} + a_{i2}\,\boldsymbol{C}_{i2} + \cdots + a_{in}\,\boldsymbol{C}_{in}$

Utveckling efter kolonn j: $\det(\boldsymbol{A}) = a_{1j}\,\boldsymbol{C}_{1j} + a_{2j}\,\boldsymbol{C}_{2j} + \cdots + a_{nj}\,\boldsymbol{C}_{nj}$

Sats

Om $\boldsymbol{A}$ är en triangulär matris, så är $\det(\boldsymbol{A})$ produkten av elementen på diagonalen av $\boldsymbol{A}$.

Sats

Låt $\boldsymbol{A}$ vara en kvadratisk matris.

a. Om matrisen $\boldsymbol{B}$ bildas genom att ta en multipel av en rad i $\boldsymbol{A}$ och lägga till en annan, så gäller

$$\det(\boldsymbol{B}) = \det(\boldsymbol{A}).$$

b. Om $\boldsymbol{B}$ bildas genom att byta plats på två rader i $\boldsymbol{A}$, så gäller

$$\det(\boldsymbol{B}) = -\det(\boldsymbol{A}).$$

c. Om $\boldsymbol{B}$ bildas genom multiplicera en rad i $\boldsymbol{A}$ med k, så gäller

$$\det(\boldsymbol{B}) = k\det(\boldsymbol{A}).$$

Sats

En kvadratisk matris $\boldsymbol{A}$ är inverterbar, *om och endast om* $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$.

Sats

Om $\boldsymbol{A}$ en kvadratisk matris så gäller

$$\det(\boldsymbol{A}^T) = \det(\boldsymbol{A})$$

Sats

Om $\boldsymbol{A}$ och $\boldsymbol{B}$ är $n \times n$-matriser så gäller

$$\det(\boldsymbol{AB}) = \det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B})$$

Sats: Inverterbarhet

Låt $\boldsymbol{A}$ vara en $n \times n$-matris. Då är de följande påståendena ekvivalenta, dvs om ett är sant så är alla sanna.

a. $\boldsymbol{A}$ är inverterbar.
b. $\boldsymbol{A}$ är radekvivalent med $\boldsymbol{I}_n$.
c. $\boldsymbol{A}$ har n pivåpositioner.
d. Den homogena ekvationen $\boldsymbol{A}\overline{x} = \overline{0}$ har endast den triviala lösningen $\overline{x} = \overline{0}$.
e. Kolonnerna i $\boldsymbol{A}$ är linjärt oberoende.
f. Avbildningen $\overline{x} \mapsto \boldsymbol{A}\overline{x}$ är *ett-till-ett* (one-to-one).
g. $\boldsymbol{A}\overline{x} = \overline{b}$ har lösning för varje $\overline{b}$.
h. Kolonnerna i $\boldsymbol{A}$ spänner upp $\mathbb{R}^n$.
i. Avbildningen $\overline{x} \mapsto \boldsymbol{A}\overline{x}$ är *på* (onto).
j. Det finns en matris $\boldsymbol{C}$ så att $\boldsymbol{CA} = \boldsymbol{I}_n$.
k. Det finns en matris $\boldsymbol{D}$ så att $\boldsymbol{AD} = \boldsymbol{I}_n$.
l. $\boldsymbol{A}^T$ är inverterbar.
m. $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$