$\boxed{09-01-13}$

$\boxed{1a}$ Linjärt oberoende om enda lösningen till vektorekvationen

$$x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + x_3\bar{v}_3 = \bar{0}$$

är $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

$\boxed{1b}$ Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & a & 4 \\ -2 & 5 & a-6 \end{bmatrix}$$

Kolonnern är linjärt beroende om matrisen är ej inverterbar, dvs om $\det(A) = 0$

$$0 = \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & a & 4 \\ -2 & 5 & a-6 \end{vmatrix} \begin{matrix} \textcircled{2} \\ \downarrow \\ \leftarrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & a & 4 \\ 0 & 9 & a \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} a & 4 \\ 9 & a \end{vmatrix} - 0 + 0 = a \cdot a - 9 \cdot 4 = a^2 - 6^2$$

dvs om $a = 6$ eller $a = -6$.

Kolonnerna är oberoende om motsatsen gäller dvs

$$a \neq 6 \text{ och } a \neq -6$$

$\boxed{1c}$

$$A^T X B = I$$

$$\underbrace{(A^T)^{-1} A^T}_{I} X \underbrace{B B^{-1}}_{I} = (A^T)^{-1} I B^{-1}$$

$$X = (A^T)^{-1} B^{-1}$$

$\boxed{09\text{-}08\text{-}21}$

$\boxed{1a}$

$$\begin{matrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{-1}{\leftarrow} + 0 - 0 + 0$$

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2\left(-1 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 - 0\right)$$

$$= 2\,(3 \cdot 2 - 1 \cdot 1) = 2 \cdot 5 = 10$$

$\boxed{1b}$

Eftersom $\det(A) \neq 0$ är matrisen inverterbar, och systemet har därmed exakt en lösning.

$\boxed{08-01-16}$

$\boxed{2a}$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & a+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 2 & a+3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & a+5 \end{vmatrix}$$

$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$

$$= -1 \begin{vmatrix} 2 & a+3 \\ 3 & a+5 \end{vmatrix} + 0 - 0 = -1\big(2(a+5) - 3(a+3)\big)$$

$$= -1(2a+10-3a-9) = -1(-a+1) = a-1$$

$\boxed{2b}$

Linjärt oberoende kolonner om A är inverterbar vilket inträffar då $\det(A) \neq 0 \iff a \neq 1$

$\boxed{2c}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -3/2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 10 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

dvs

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 2 \\ 5 & -3 & -3 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$