M0030M – Lektion 21

Linjär algebra och integralkalkyl

Ove Edlund

2018-12-05

Partition

En **partition** är en ordnad mängd med punkter på ett intervall $[a, b]$, så att partitionen P som ges av

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots x_n\}$$

uppfyller $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n = b$. Detta ger upphov till n st. delintervall $[x_{i-1}, x_i]$.

Längden på varje delintervall betecknas $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, och *den största* av dessa längder kallas **normen** för partitionen $\|P\| = \max_i \Delta x_i$.

Över- och undersumma

Givet en funktion f och en partition P definieras **undersumman** enligt

$$L(f,P) = f(l_1)\Delta x_1 + f(l_2)\Delta x_2 + \cdots + f(l_n)\Delta x_n$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f(l_i)\Delta x_i$$

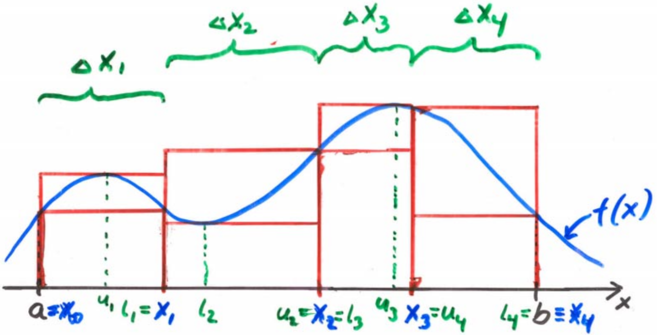
där $f(l_i)$ är det **minsta** funktionsvärdet i intervallet $[x_{i-1}, x_i]$.

Översumman definieras av

$$U(f,P) = f(u_1)\Delta x_1 + f(u_2)\Delta x_2 + \cdots + f(u_n)\Delta x_n$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f(u_i)\Delta x_i$$

där $f(u_i)$ är det **största** funktionsvärdet i intervallet $[x_{i-1}, x_i]$.

Över- och undersumma



$$\mathcal{P}=\{a=x_0<x_1<x_2<x_3<\dots<x_n=b\}$$

$$U(f,\mathcal{P})=\sum_{i=1}^{n} f(u_i)\Delta x_i$$

$$L(f,\mathcal{P})=\sum_{i=1}^{n} f(l_i)\Delta x_i$$

Bestämd integral

Om det **för alla** partitioner P finns **endast ett** värde I som uppfyller

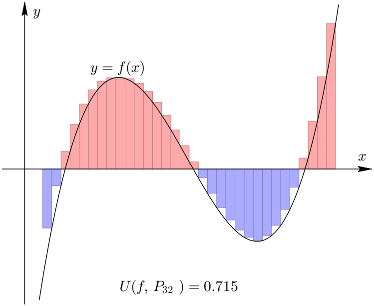
$$L(f,P) \leq I \leq U(f,P)$$

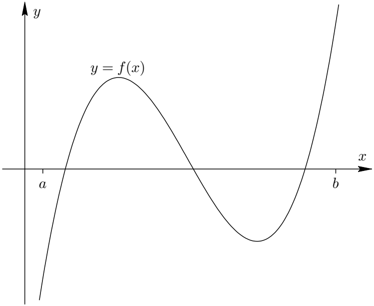
säger vi att f är **integrerbar** i intervallet $[a,b]$.

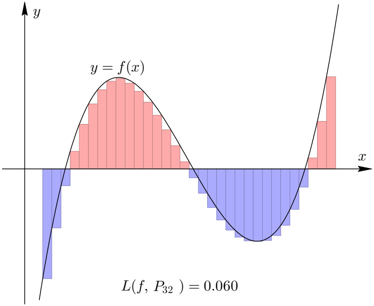
Vi benämner I den **bestämda integralen** av f på $[a,b]$, och skriver

$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Exempel, Över/undersumma







$U(f, P_{8192}) = 0.388416768$

$L(f, P_{8192}) = 0.385855115$

$\big(U(f, P_{8192}) + L(f, P_{8192})\big)/2 = 0.387135941$

$\int_a^b f(x)dx = 0.387135938$

Riemannsumma

Givet en funktion f och en partition P definieras **Riemannsumman** enligt

$$R(f,P) = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \cdots + f(c_n)\Delta x_n$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

där c_i väljs godtyckligt i intervallet $[x_{i-1}, x_i]$.

Uppenbarligen gäller då

$$L(f,P) \leq R(f,P) \leq U(f,P).$$

Om f är integrerbar följer därav att

$$\lim_{\|P\|\to 0} R(f,P) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Sats

Om f är kontinuerlig på $[a,b]$, så är f integrerbar på $[a,b]$.