M0030M – Lektion 24

Linjär algebra och integralkalkyl

Ove Edlund

2018-12-11

Elementära obestämda integraler

7. $\displaystyle\int x^r\,dx = \tfrac{1}{r+1}\,x^{r+1} + C, \qquad (r \neq -1)$

8. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

9. $\displaystyle\int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C, \quad (a \neq 0)$

10. $\displaystyle\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax + C, \quad (a \neq 0)$

11. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 ax}\,dx = \frac{1}{a}\tan ax + C, \quad (a \neq 0)$

15. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a} + C, \quad (a > 0)$

16. $\displaystyle\int \frac{1}{a^2 + x^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C, \quad (a \neq 0)$

17. $\displaystyle\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}\,e^{ax} + C, \qquad (a \neq 0)$

Elementära obestämda integraler, utan konstanten *a*

7. $\displaystyle\int x^r\,dx = \tfrac{1}{r+1}\,x^{r+1} + C, \qquad (r \neq -1)$

8. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

9. $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C,$

10. $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C,$

11. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C,$

15. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C,$

16. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C,$

17. $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C,$

Substitution

Substitution i obestämd integral

Om f är kontinuerlig med primitiv funktion F, och g är deriverbar, så är

$$\int f\big(g(x)\big)\, g'(x)\, dx = F\big(g(x)\big) + C.$$

Substitution i bestämd integral

Sats

Om g är deriverbar på $[a, b]$, och f är kontinuerlig på värdemängden av g, och $A = g(a), B = g(b)$, så är

$$\int_a^b f\big(g(x)\big)\, g'(x)\, dx = \int_A^B f(u)\, du,$$

där $u = g(x)$ och $du = g'(x)\, dx$.

Trigonometriska integraler

(a) $\displaystyle\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + C$

(b) $\displaystyle\int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + C$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x} \, dx = \ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x} \, dx = -\ln\left|\frac{1+\cos x}{\sin x}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + C$

Trigonometriska integraler

Integraler av typen

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx$$

där $m, n \in \mathbb{N}$ (dvs naturliga tal), hanteras på ett av två sätt:

1. Om m och/eller n är udda kan substitutionsmetoden utnyttjas.
2. Om både m och n är jämna utnyttjas sambanden

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

för att reducera gradtalet hos exponenterna.