M0030M – Lektion 29

Linjär algebra och integralkalkyl

Ove Edlund

2018-12-17

Omvänd substitution

Använd substitutionsmetoden baklänges, dvs gör integralen till synes "mer komplicerad". Så istället för att lösa

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

löser vi

$$\int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f\big(g(u)\big)\,g'(u)\,du.$$

Omvänd substitution med sinus

Integraler som innehåller

$$\left(a^2 - x^2\right)^{n/2} \quad \text{eller} \quad \arcsin(x/a)$$

blir ibland enklare med substitutionen

$$x = a \sin \theta.$$

Omvänd substitution med tangens

Integraler som innehåller

$$\left(a^2 + x^2\right)^{1/2} \quad \text{eller} \quad \frac{1}{a^2 + x^2} \quad \text{eller} \quad \arctan(x/a)$$

blir ibland enklare med substitutionen

$$x = a \tan \theta.$$

Omvänd substitution med $\tan \frac{\theta}{2}$

En integral uttryckt i $\sin\theta$, $\cos\theta$ och/eller $\tan\theta$, kan ibland omvandlas till en integral över en rationell funktion via substitutionen

$$x = \tan\frac{\theta}{2}$$

vilket ger

$$d\theta = \frac{2}{1+x^2}dx$$

$$\sin\theta = \frac{2\,x}{1+x^2}$$

$$\cos\theta = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$\tan\theta = \frac{2\,x}{1-x^2}$$