M0030M – Lektion 30

Linjär algebra och integralkalkyl

Ove Edlund

2018-12-17

Generaliserade integraler (1)

Om den ena integrationsgränsen är oändligheten ($\pm\infty$), definierar vi den generaliserade integralen som

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\,dx$$

eller

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{R\to-\infty} \int_R^b f(x)\,dx\ .$$

Om gränsvärdet existerar, säger vi att den generaliserade integralen **konvergerar**. Annars **divergerar** den.

Generaliserade integraler (2)

Om funktionen f är obegränsad ($\pm\infty$) i ena integrationsgränsen, definierar vi den generaliserade integralen som

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to a+} \int_c^b f(x)\,dx$$

eller

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to b-} \int_a^c f(x)\,dx\ .$$

Om gränsvärdet existerar, säger vi att den generaliserade integralen **konvergerar**. Annars **divergerar** den.

Jämförelsekriteriet

Sats: Jämförelsekriteriet

Låt $-\infty \leq a < b \leq \infty$, och antag att funktionerna f och g är kontinuerliga på intervallet (a, b) och uppfyller att $0 \leq f(x) \leq g(x)$.

Om $\int_a^b g(x)\,dx$ konvergerar, så konvergerar också $\int_a^b f(x)\,dx$, och

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

Detta ger även att, om $\int_a^b f(x)\,dx$ divergerar, så divergerar också $\int_a^b g(x)\,dx$.