M0030M – Lektion 3

Linjär algebra och integralkalkyl

Ove Edlund

2018-11-07

Definition: Vektorprodukt

Om $\overline{u}$ och $\overline{v}$ tillhör $\mathbb{R}^3$ (dvs är tredimensionella vektorer) så är **vektorprodukten** $\overline{u} \times \overline{v}$ den vektor i $\mathbb{R}^3$ som uppfyller tre villkor:

1. $\overline{u} \times \overline{v}$ är ortogonal mot både $\overline{u}$ och $\overline{v}$
2. $\|\overline{u} \times \overline{v}\| = \|\overline{u}\|\|\overline{v}\| \sin\theta$,
   där θ är vinkeln mellan $\overline{u}$ och $\overline{v}$
3. $\overline{u}$, $\overline{v}$ och $\overline{u} \times \overline{v}$ bildar en högerorienterad vektortrippel

Sats 2: Beräkning av vektorprodukt

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ -(u_1 v_3 - u_3 v_1) \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{bmatrix}$$

Bevis av Sats 2

Låt

$$\overline{w} = \begin{bmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ -(u_1 v_3 - u_3 v_1) \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{bmatrix}$$

1. (a) Visa att $\overline{w} \bullet \overline{u} = 0$

$$\overline{w} \bullet \overline{u} = \begin{bmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ -(u_1 v_3 - u_3 v_1) \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = (u_2 v_3 - u_3 v_2) u_1 + (-u_1 v_3 + u_3 v_1) u_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1) u_3$$

$$= u_1 u_2 v_3 - u_1 u_3 v_2 - u_1 u_2 v_3 + u_2 u_3 v_1 + u_1 u_3 v_2 - u_2 u_3 v_1 = 0 + 0 + 0 = 0$$

   (b) Man kan visa att $\overline{w} \bullet \overline{v} = 0$ på samma sätt.

2. Visa att $\|\overline{w}\|^2 = \|\overline{u}\|^2 \|\overline{v}\|^2 \sin^2 \theta$

$$\text{V.L.} = \|\overline{w}\|^2 = \overline{w} \bullet \overline{w} = (u_2 v_3 - u_3 v_2)^2 + (-u_1 v_3 + u_3 v_1)^2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2$$

$$= u_2^2 v_3^2 - 2 u_2 u_3 v_2 v_3 + u_3^2 v_2^2 + u_1^2 v_3^2 - 2 u_1 u_3 v_1 v_3 + u_3^2 v_1^2 + u_1^2 v_2^2 - 2 u_1 u_2 v_1 v_2 + u_2^2 v_1^2$$

$$\text{H.L.} = \|\overline{u}\|^2 \|\overline{v}\|^2 \sin^2 \theta = \|\overline{u}\|^2 \|\overline{v}\|^2 (1 - \cos^2 \theta) = \|\overline{u}\|^2 \|\overline{v}\|^2 - (\|\overline{u}\| \|\overline{v}\| \cos \theta)^2 = (\overline{u} \bullet \overline{u})(\overline{v} \bullet \overline{v}) - (\overline{u} \bullet \overline{v})^2$$

$$= (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)^2 = \ldots = \text{V.L.} \quad \text{(för detaljer, se Adams)}$$

3. Visa högerorientering

Vrid hela vektortrippeln utan att ändra några vinklar så att $\overline{u}$ pekar i x-axelns rikning och $\overline{v}$ endast har utbredning i xy-led. Då gäller

$$\overline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \overline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \overline{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_1 v_2 \end{bmatrix}$$

Eftersom u_1 är positiv, bestäms tecknet på $\overline{w}$ i z-led av tecknet på v_2, vilket motsvarar högerorientering.
Därmed är det visat att $\overline{w}$ i själva verket är vektorprodukten $\overline{u} \times \overline{v}$.

Egenskaper hos vektorprodukten

Om $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w} \in \mathbb{R}^3$ och $\alpha \in \mathbb{R}$ så gäller

1. $\overline{u} \times \overline{u} = \overline{0}$
2. $\overline{u} \times \overline{v} = -\overline{v} \times \overline{u}$
3. $(\overline{u} + \overline{v}) \times \overline{w} = \overline{u} \times \overline{w} + \overline{v} \times \overline{w}$
4. $\overline{u} \times (\overline{v} + \overline{w}) = \overline{u} \times \overline{v} + \overline{u} \times \overline{w}$
5. $\alpha(\overline{u} \times \overline{v}) = (\alpha\overline{u}) \times \overline{v} = \overline{u} \times (\alpha\overline{v})$
6. $\overline{u} \bullet (\overline{u} \times \overline{v}) = 0$ och $\overline{v} \bullet (\overline{u} \times \overline{v}) = 0$

OBS! OBS! OBS!

I allmänhet gäller att

$$\overline{u} \times (\overline{v} \times \overline{w}) \neq (\overline{u} \times \overline{v}) \times \overline{w}$$

Determinanter

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

Vektorprodukt som determinant

$$\overline{u} \times \overline{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i} \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

Trippelprodukt

Trippelprodukten mellan $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w} \in \mathbb{R}^3$ ges av

$$\overline{u} \bullet (\overline{v} \times \overline{w}).$$

Den beskriver bl.a. volymen av den parallellepiped som spänns upp av vektorerna (sånär som på tecknet ($\pm$)). Om $\overline{u}$, $\overline{v}$ och $\overline{w}$ ligger i samma plan är följdaktligen trippelprodukten **noll**.

Trippelprodukten kan också beräknas med en determinant enligt

$$\overline{u} \bullet (\overline{v} \times \overline{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$