M0030M – Lektion 4 & 5

Linjär algebra och integralkalkyl

Ove Edlund

2018-11-09

Planets ekvation

Givet en ortsvektor som pekar på en punkt i planet: $\overline{r}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$

och en normalvektor till planet: $\overline{n} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}$

så beskrivs planet av alla ortsvektorer $\overline{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

som uppfyller

$$\overline{n} \bullet (\overline{r} - \overline{r}_0) = 0.$$

Om vi utvecklar skalärprodukten erhålls

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Detta går alltid att skriva på formen

$$A\,x + B\,y + C\,z = D.$$

Linjens ekvation i tre dimensioner

Givet en ortsvektor som pekar på en punkt på linjen: $\bar{r}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$

och en vektor som pekar i linjens rikning: $\bar{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

så beskrivs linjen av ortsvektorerna $\bar{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

som erhålls för alla $-\infty < t < \infty$ i ekvationen $\bar{r} = \bar{r}_0 + t\,\bar{v}$.
Uttrycket kan också skrivas

$$\begin{cases} x = x_0 + a\,t \\ y = y_0 + b\,t \\ z = z_0 + c\,t \end{cases} .$$

P.g.a. parametern t, kallas det ovanstående för **parameterform**. Adams använder ofta **normalform**, där man eliminerar t och får en likhet mellan tre uttryck:

$$t = \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Avstånd, punkt till plan

Avståndet mellan planet $A\,x + B\,y + C\,z = D$ och punkten $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ges av beloppet av skalärprojektionen av en vektor $\overline{w} = \overrightarrow{PP_0}$ på normalen $\overline{n}$. Punkten P är en valfri punkt som ligger i planet. Avståndet kan därmed uttryckas

$$d = \frac{|\overline{w} \bullet \overline{n}|}{\|\overline{n}\|}$$

Det går att formulera om detta uttryck till

$$d = \frac{|A\,x_0 + B\,y_0 + C\,z_0 - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Avstånd, punkt till linje

Avståndet mellan linjen $\overline{r} = \overline{r}_0 + t\overline{v}, \ t \in \mathbb{R}$ och punkten $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, fås genom ortogonal projektion av $\overline{w} = \overrightarrow{PP_0}$ på $\overline{r}$ och sedan utnyttjande av Pythagoras sats. Alternativt kan man ta fram avståndet med $d = \|\overline{w} - \overline{w}_{\overline{v}}\|$. Här är P är en valfri punkt på linjen.

Adams föreslår också en annan metod, nämligen att bestämma avståndet d med

$$d = \frac{\|\overline{w} \times \overline{v}\|}{\|\overline{v}\|} \ .$$

Denna enkla formel fungerar dock endast i tre dimensioner.

Avstånd, mellan två linjer

Avståndet mellan linjen $\overline{r} = \overline{r}_1 + t_1\overline{v}_1,\ \ t_1 \in \mathbb{R}$ och linjen $\overline{r} = \overline{r}_2 + t_2\overline{v}_2,\ \ t_2 \in \mathbb{R}$, ges av ortogonal projektion av $\overline{w} = \overline{r}_2 - \overline{r}_1$ på $\overline{n} = \overline{v}_1 \times \overline{v}_2$, dvs ortogonal projektion av en vektor mellan två punkter mellan linjerna på en riktning som är ortogonal mot bägge linjerna. Detta ger ett avstånd

$$d = \frac{|\overline{w} \bullet \overline{n}|}{\|\overline{n}\|}$$

Adams

$$d = \frac{|(\overline{r}_2 - \overline{r}_1) \bullet (\overline{v}_1 \times \overline{v}_2)|}{\|\overline{v}_1 \times \overline{v}_2\|}$$