M0030M – Lektion 8

Linjär algebra och integralkalkyl

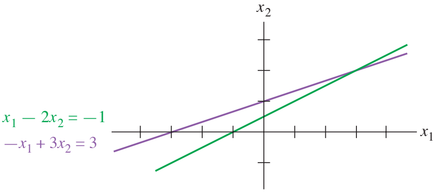
Ove Edlund

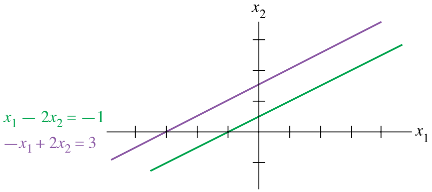
2018-11-15

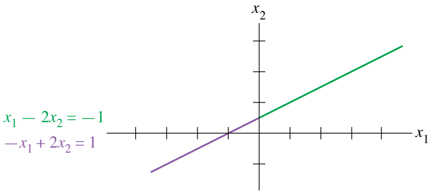
Ekvationssystem med två linjer

har antingen

- **en** gemensam punkt,
- **ingen** gemensam punkt (ej lösbart), eller
- **oändligt många** gemensamma punkter.



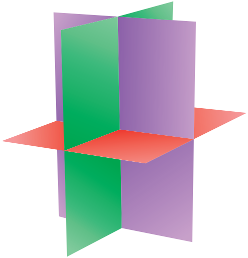


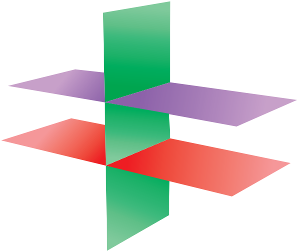


Ekvationssystem med tre plan

har antingen

- **en** gemensam punkt,
- **ingen** gemensam punkt (ej lösbart), eller
- **oändligt många** gemensamma punkter.





Matriser – Exempel

Det linjära ekvationssystemet

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & 2x_2 & - & 8x_3 & = & 8 \\ -4x_1 & + & 5x_2 & + & 9x_3 & = & -9 \end{array}\right.$$

har **koefficientmatris**

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ -4 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

och **utökad matris**

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array}\right]$$

Matriser delas in i **rader** och **kolonner**.
Elementet -8 ovan befinner sig på rad 2 och kolonn 3.

Elementära radoperationer

1. Addera till en rad en multipel av en annan rad.
2. Byt plats på två rader.
3. Multiplicera alla element i en rad med en konstant skild från noll.

Definition: Radekvivalens

Två utökade matriser är **radekvivalenta** om den ena kan omvandlas till den andra via elementära radoperationer.

Om två utökade matriser till två linjära ekvationssystem är radekvivalenta, **så** har de samma uppsättning lösningar.

Exempel: elementära radoperationer

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Den sista utökade matrisen motsvarar systemet

$$\begin{cases} x_1 \phantom{{}+x_2+x_3} = 29 \\ \phantom{x_1+{}} x_2 \phantom{{}+x_3} = 16 \\ \phantom{x_1+x_2+{}} x_3 = 3 \end{cases}$$

Trappstegsform

Den utökade matrisen

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \end{array}\right]$$

kan omvandlas till en radekvivalent matris på **trappstegsform**:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Man kan också gå vidare till **reducerad trappstegsform**:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -3 & 0 & -19 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Trappstegsform

Exempel:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{bmatrix} \blacksquare & * & * \\ 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \left[\begin{array}{cccccccccc|c} 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \end{array}\right]$$

Det första elementet som är skillt från noll i en rad kallas **ledande element**, eller **pivåelement**.

1. Rader som innehåller icke-nollor är ovanför rader som endast innehåller nollor.
2. Det ledande elementet i en rad ligger till höger om det ledande elementet i raden ovanför.
3. Elementen som ligger under det ledande elementet i samma kolonn är alla noll.

Reducerad trappstegsform

Exempel:

$$\left[\begin{array}{cccccccccc|c} 0 & 1 & * & 0 & 0 & 0 & * & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & * & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{array}\right]$$

följande villkor tillkommer...

4. De ledande elementen har värde 1.
5. Det ledande elementet är det enda elementet som är skillt från noll i sin kolonn.

Sats

Varje matris är radekvivalent med endast en reducerad trappstegsmatris

Lösa system

Variabler som hör till trappstegsmatrisens ledande element/pivåelement kallas **bundna**. Övriga variabler kallas **fria**.

Vi finner lösningen genom att införa *parametrar* för de fria variablerna, och lösa ut de bundna variablerna med **bakåtsubstitution**, dvs vi börjar med sista ekvationen och går sedan uppåt.

Trappstegsformen ger följande information

1. Om alla variabler är bundna är lösningen entydig.
2. Om någon ekvation är en falsk utsaga (ex. $0 = 5$), så existerar ingen lösning.
3. Om någon variabel är fri, finns oändligt många lösningar.