M0030M – Lektion 9

Linjär algebra och integralkalkyl

Ove Edlund

2018-11-16

Exempel: Linjärkombination

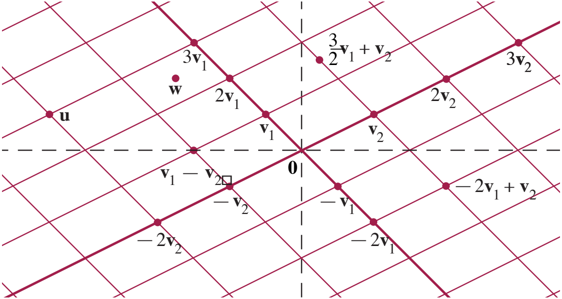
Givet vektorerna

$$\overline{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \overline{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

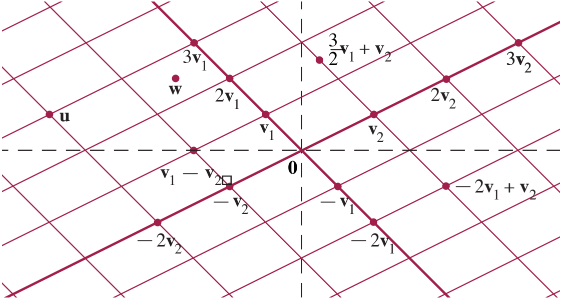
så illustreras linjärkombinationerna

$$\overline{y} = x_1\,\overline{v}_1 + x_2\,\overline{v}_2$$

för skiftande värden på x_1 och x_2 av



Exempel: Linjärkombination, forts.



Bestäm värden på x_1 och x_2 så att

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -7/2 \\ 2 \end{bmatrix}}_{=\overline{w}} = x_1 \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=\overline{v}_1} + x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=\overline{v}_2}$$

Vektorekvationer

Vektorekvationen

$$x_1\,\overline{a}_1 + x_2\,\overline{a}_2 + \cdots + x_n\,\overline{a}_n = \overline{b}$$

som talar om vilka linjärkombinationer av $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ som ger vektorn $\overline{b}$, har samma lösningar som ekvationssystemet vars utökade matris är

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \overline{a}_1 & \overline{a}_2 & \ldots & \overline{a}_n & \overline{b} \end{array}\right].$$

Speciellt gäller att $\overline{b}$ endast kan bildas av linjärkombinationen om ekvationssystemet är lösbart.

Linjära höljet

Definition

Om $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_p$ alla tillhör $\mathbb{R}^n$, så benämns mängden av alla linjärkombinationer av $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_p$ för det **linjära höljet** av vektorerna $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_p$ med beteckning

$$\mathrm{Span}\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_p\}.$$

Dvs det linjära höljet är de vektorer som kan uttryckas med

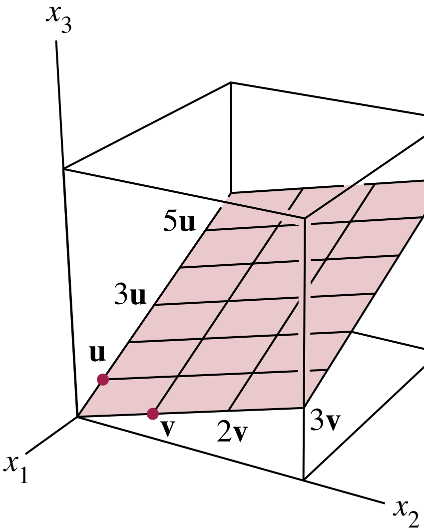
$$c_1\,\overline{v}_1 + c_2\,\overline{v}_2 + \cdots + c_p\,\overline{v}_p.$$

för **alla** val av $c_1, c_2, \ldots, c_p$.

Observera att $\overline{0}$ alltid ingår i det linjära höljet.

Exempel

Linjära höljet av två vektorer i $\mathbb{R}^3$, dvs Span$(\overline{u}, \overline{v})$:



Matris-vektor-multiplikation

Om $\boldsymbol{A}$ är en $m \times n$-matris (dvs m rader och n kolonner), med kolonner $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$, dvs

$$\boldsymbol{A} = \left[\begin{array}{cccc} \overline{a}_1 & \overline{a}_2 & \ldots & \overline{a}_n \end{array}\right]$$

och $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ är vektorn

$$\overline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

så **definierar** vi produkten $\boldsymbol{A}\overline{x}$ enligt:

$$\boldsymbol{A}\overline{x} = \left[\begin{array}{cccc} \overline{a}_1 & \overline{a}_2 & \ldots & \overline{a}_n \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\,\overline{a}_1 + x_2\,\overline{a}_2 + \cdots + x_n\,\overline{a}_n$$

dvs som en linjärkombination av kolonnerna i $\boldsymbol{A}$ med elementen i $\overline{x}$ som vikter.

Matrisekvationen $\boldsymbol{A}\,\overline{x} = \overline{b}$

Sats

Matrisekvationen

$$\boldsymbol{A}\,\overline{x} = \overline{b}$$

har samma lösningar som vektorekvationen

$$x_1\,\overline{a}_1 + x_2\,\overline{a}_2 + \cdots + x_n\,\overline{a}_n = \overline{b}$$

och därmed också samma lösningar som det linjära ekvationssystem som har utökad matris

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \overline{a}_1 & \overline{a}_2 & \ldots & \overline{a}_n & \overline{b} \end{array}\right]$$

Sats: Existens av lösning

Låt $\boldsymbol{A}$ vara en $m \times n$-matris. Då är de följande påståendena ekvivalenta, dvs om ett är sant så är alla sanna

1. Ekvationen $\boldsymbol{A}\overline{x} = \overline{b}$ har lösning för alla högerled $\overline{b} \in \mathbb{R}^m$
2. Det linjära höljet av kolonnerna i $\boldsymbol{A}$ är lika med $\mathbb{R}^m$, dvs om $\boldsymbol{A} = [\ \overline{a}_1 \quad \overline{a}_2 \quad \dots \quad \overline{a}_n\ ]$ så är $\mathrm{Span}\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, \dots, \overline{a}_n\} = \mathbb{R}^m$
3. $\boldsymbol{A}$ har en pivåposition på varje rad.

Räkneregler för $\boldsymbol{A}\,\overline{x}$

Sats: Räkneregler för $\boldsymbol{A}\,\overline{x}$

Om $\boldsymbol{A}$ är en $m \times n$-matris, $\overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{R}^n$ och $c \in \mathbb{R}$, då gäller

1. $\boldsymbol{A}(\overline{u} + \overline{v}) = \boldsymbol{A}\,\overline{u} + \boldsymbol{A}\,\overline{v}$
2. $\boldsymbol{A}(c\,\overline{u}) = c(\boldsymbol{A}\,\overline{u})$