Tentamen i Matematik 2: M0030M.

Datum: 2015-08-21
Skrivtid: 09:00–14:00
Antal uppgifter: 5 (32 poäng).
Examinator: Norbert Euler
Kontakt: Lech Maligranda 0920-491318

Tillåtna hjälpmedel: Inga

Till alla uppgifterna skall fullständiga lösningar lämnas.
Resonemang och uträkningar ska vara tydligt presenterade.
Även endast delvis lösta problem kan ge poäng.
Enbart svar ger 0 poäng.

Betygsgränser: $14p - 19p =$ **3**; $20p - 24p =$ **4**; $25p - 32p$=**5**.

Note: For the English version, please turn to page 4

Problem 1:

a) Bestäm ekvationen för planet i $\mathbb{R}^3$ som går genom punkten $(1, 3, 1)$ och är pararallellt med planet $x + y - z = 1$.

[2 poäng]

b) Bestäm avståndet från punkten $(1, 2, -2)$ till planet $x + 2y + 2z = 7$.

[2 poäng]

c) Bestäm ekvationen (i parametrisk form) för linjen som innehåller punkten $(2, -1, 5)$ och som är vinkelrät mot båda linjerna ℓ_1 och ℓ_2 som ges av

$$\ell_1 : \begin{cases} x = t + 2 \\ y = -t - 1 \\ z = -2t + 2 \quad \text{för alla } t \in \mathbb{R}, \end{cases} \qquad \ell_2 : \begin{cases} x = 2s + 3 \\ y = s + 4 \\ z = -s + 6 \quad \text{för alla } s \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

[2 poäng]

Problem 2:

a) Betrakta de linjära avbildningarna T_1, T_2 och T_3, som avbildar vektorerna i $\mathbb{R}^2$ där

T_1 roterar varje vektor i $\mathbb{R}^2$ medurs vinkeln $\pi/6$ genom origo;
T_2 speglar varje vektor i $\mathbb{R}^2$ i linjen $y = -x$;
T_3 projicerar varje vektor i $\mathbb{R}^2$ ortogonalt på y-axeln.

i) Bestäm standardmatrisen för $T(\mathbf{x}) = T_3 \circ T_2 \circ T_1(\mathbf{x})$ för alla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Symbolen $\circ$ står för sammansättning av avbildningarna.

[4 poäng]

ii) Är avbildningen $T(\mathbf{x}) = T_3 \circ T_2 \circ T_1(\mathbf{x})$ som du har fått i i) inverterbar? Motivera ditt svar. [1 poäng]

b) Betrakta den linjära avbildningen $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ med standardmatrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & -6 & -3 & 1 \\ -3 & 8 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Bestäm alla vektorer $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ så att T avbildar $\mathbf{x}$ på $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$, dvs alla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ så att

$$T : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{0}.$$

[2 poäng]

Problem 3:

a) Bestäm integralen

$$\int_1^e (x^2 + x + 1) \ln x \, dx.$$

[3 poäng]

b) Använda rekursionsformeln

$$I_n = -\left(\frac{1}{n}\right) \sin^{n-1} x \cos x + \left(\frac{n-1}{n}\right) I_{n-2}, \quad n = 3, 4, \ldots$$

där

$$I_n = \int \sin^n x \, dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

för att beräkna

$$\int \sin^6 x \, dx.$$

[3 poäng]

c) Bestäm derivatan

$$\frac{d}{dx}\left(\int_1^{\sin x} e^{-t^2} \, dt\right).$$

[1 poäng]

Problem 4:

a) Använd en bestämd integral för att beräkna arean av ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

som har halvaxlar $a > 0$ och $b > 0$.

[3 poäng]

b) Beräkna volymen av en kropp med höjden 1 ovanför xy-planet med tvärsnittsarean vid höjden z som ges av ellipsen med halvaxlarna

$$z \quad \text{och} \quad \sqrt{1 - z^2}.$$

[3 poäng]

Problem 5:
Lös ett och endast ett av följande två problem, dvs a) eller b).

a) Betrakta kurven som ges av följande ekvationer på parameterform

$$x(\theta) = r(\theta - \sin\theta)$$
$$y(\theta) = r(1 - \cos\theta),$$

där θ är en reell parameter. Den här kurvan är känd som cykloiden. Låt θ variera mellan $\theta = 0$ och $\theta = 2\pi$. Detta kommer att ge en båge av cykloiden. Rotera denna båge kring x-axeln och bestäm den resulterande arean av rotationsytan.

b) i) Bevisa att det inte finns några linjära ekvationssystem som endast har två lösningar.

ii) Ge definitionen av den linjära avbildningen $T:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

[6 poäng]

The English version:

Problem 1:

a) Find the equation of the plane in $\mathbb{R}^3$ which is passing through the point $(1, 3, 1)$ and which is parallel to the plane $x + y - z = 1$.

[2 points]

b) Find the distance from the point $(1, 2, -2)$ to the plane $x + 2y + 2z = 7$.

[2 points]

c) Find the parametric equation of the line in $\mathbb{R}^3$ that contains the point $(2, -1, 5)$ and that is parallel to the vector which is orthogonal to both ℓ_1 and ℓ_2, where

$$\ell_1 : \begin{cases} x = t + 2 \\ y = -t - 1 \\ z = -2t + 2 \quad \text{for all } t \in \mathbb{R}, \end{cases} \qquad \ell_2 : \begin{cases} x = 2s + 3 \\ y = s + 4 \\ z = -s + 6 \quad \text{for all } s \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

[2 points]

Problem 2:

a) Consider three linear transformations, T_1, T_2 and T_3, which map vectors in $\mathbb{R}^2$, where

T_1 rotates every vector in $\mathbb{R}^2$ clockwise by the angel $\pi/6$ about the origin;
T_2 reflects every vector in $\mathbb{R}^2$ about the line $y = -x$;
T_3 projects every vector in $\mathbb{R}^2$ orthogonal onto the y-axis.

i) Find the standard matrix for $T(\mathbf{x}) = T_3 \circ T_3 \circ T_1(\mathbf{x})$ for all $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. The symbol $\circ$ stands for the composition of transformations.

[4 points]

ii) Is the transformation, $T(\mathbf{x}) = T_3 \circ T_3 \circ T_1(\mathbf{x})$ that you have obtained in i), an invertible transformation? Explain your answer. [1 point]

b) Consider the linear transformation $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ with standard matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & -6 & -3 & 1 \\ -3 & 8 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Find all vectors $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ which map to the zero vector $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$ under T, that is all $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$, such that

$$T : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{0}.$$

[2 points]

Problem 3:

a) Calculate the following integral:

$$\int_1^e (x^2 + x + 1) \ln x \, dx.$$

[3 points]

b) Make use of the reduction formula

$$I_n = -\left(\frac{1}{n}\right) \sin^{n-1} x \cos x + \left(\frac{n-1}{n}\right) I_{n-2}, \quad n = 3, 4, \ldots,$$

where

$$I_n = \int \sin^n x \, dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

to calculate the following integral

$$\int \sin^6 x \, dx.$$

[3 points]

c) Find the derivative

$$\frac{d}{dx}\left(\int_1^{\sin x} e^{-t^2}\,dt\right).$$

[1 point]

Problem 4:

a) Make use of a definite integral to calculate the area of an ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

with semi-axes $a > 0$ and $b > 0$. [3 points]

b) Find the volume of a solid of hight 1 above the xy-plane with cross-section area at height z given by an ellipse with semi-axes z and $\sqrt{1-z^2}$. [3 points]

Problem 5:
Solve **only one** of the following two options, i.e. either a) or b).

a) Consider the smooth curve given by the parametric equations

$$x(\theta) = r(\theta - \sin\theta)$$
$$y(\theta) = r(1 - \cos\theta),$$

where θ is a real parameter. This is known as a cycloid. Allow now θ to change between $\theta = 0$ to $\theta = 2\pi$. This will give one arch of the cycloid. Rotate this arch about the x-axis and calculate the resulting surface area of revolution.

b) i) Prove that there exists no consistent linear system of algebraic equations which admits only two solutions.

ii) Give the definition of a linear transformation $T:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

[6 points]