M0031M, Linjär algebra och differentialekvationer

Föreläsning 10

Ove Edlund

LTU

2016-09-09

Koordinater

Sats 7

Låt $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ vara en bas för vektorrummet V. För varje $\mathbf{x} \in V$ finns då unika skalärer $c_1, c_2, \ldots, c_n$ så att

$$\mathbf{x} = c_1\,\mathbf{b}_1 + c_2\,\mathbf{b}_2 + \cdots + c_n\,\mathbf{b}_n.$$

Definition: Koordinater

Om $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ är en bas för vektorrummet V och $\mathbf{x} \in V$, så ges *koordinaterna för* $\mathbf{x}$ *i basen* $\mathcal{B}$ av vikterna $c_1, c_2, \ldots, c_n$ som uppfyller

$$\mathbf{x} = c_1\,\mathbf{b}_1 + c_2\,\mathbf{b}_2 + \cdots + c_n\,\mathbf{b}_n.$$

Vektorn i $\mathbb{R}^n$ med $c_1, c_2, \ldots, c_n$ som element kallas $\mathcal{B}$-**koordinatvektorn för** $\mathbf{x}$, och skrivs

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

Koordinatbytesmatris från $\mathcal{B}$ till $\mathbb{R}^m$

Givet basen $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$, där $\mathbf{b}_k \in \mathbb{R}^m$ gäller att

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}_{\mathcal{B}} \, [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$$

där $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^n$ och $\mathbf{P}_{\mathcal{B}}$ är $m \times n$-matrisen

$$\mathbf{P}_{\mathcal{B}} = \left[\, \mathbf{b}_1 \; \mathbf{b}_2 \; \ldots \; \mathbf{b}_n \,\right] .$$

Om $m = n$ ges avbildningen $\mathbf{x} \mapsto [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ av

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{P}_{\mathcal{B}}^{-1} \, \mathbf{x}$$

Sats 8

Låt $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ vara en bas för vektorrummet V. Koordinatavbildningen $\mathbf{x} \mapsto [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ är då en linjär avbildning från V till $\mathbb{R}^n$ som både är ett-till-ett (injektiv) och på (surjektiv).

Om det finns en ett-till-ett och på avbildning från ett vektorrum till ett annat är vektorrummen **isomorfa**, dvs de har "samma form".