M0031M, Linjär algebra och differentialekvationer

Föreläsning 11

Ove Edlund

LTU

2016-09-12

Dimension

Sats 9

Om ett vektorrum V har bas $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$, så är varje mängd av mer än n vektorer i V linjärt beroende.

Sats 10

Om ett vektorrum V har en bas bestående av n vektorer, så består alla baser som spänner upp V av n vektorer.

Definition: Dimension

Om det finns en ändlig mängd vektorer som spänner upp V, så är V **ändligtdimensionellt**, och $\dim(V)$ är **dimensionen** för V som ges av antalet element i vektorrummets bas.

Nollvektorrummet $\{0\}$ har dimension 0.

Om V ej är ändligtdimensionellt så är det **oändligtdimensionellt**.

Sats 11

Låt H vara ett underrum till ett ändligtdimensionellt vektorrum V.

a. Varje linjärt oberoende mängd av vektorer i H kan, om så behövs, kompletteras/utökas till en bas för H.
b. H är också ändligtdimensionellt och $\dim(H) \leq \dim(V)$.

Sats 12

Låt V vara ett p-dimensionellt vektorrum, där $p \geq 1$.

a. Varje mängd av p linjärt oberoende vektorer i V är en bas för V.
b. Varje mängd av p vektorer som spänner upp V är en bas för V.

Definition: radrum

Radrummet till en $m \times n$-matris $\mathbf{A}$, dvs $\text{Row}(\mathbf{A})$, är mängden av alla linjärkombinationer av raderna i $\mathbf{A}$. Dvs om

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m^T \end{bmatrix}$$

så är

$$\text{Row}(\mathbf{A}) = \text{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m\}$$

vilket också innebär att $\text{Row}(\mathbf{A}) = \text{Col}(\mathbf{A}^T)$.

Sats 13

Om två matriser $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ är radekvivalenta så har de samma radrum. $(\mathbf{A} \sim \mathbf{B} \Rightarrow \text{Row}(\mathbf{A}) = \text{Row}(\mathbf{B}))$

Om $\mathbf{B}$ är på trappstegsform, bildar raderna som ej endast består av nollor, en bas för $\text{Row}(\mathbf{A})$.

Definition: rang

Rangen av en matris $\mathbf{A}$, är lika med dimensionen hos kolonnrummet, dvs

$$\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = \dim(\mathrm{Col}(\mathbf{A})).$$

Sats 14

Dimensionerna hos kolonnrummet och radrummet är lika. Båda har dimension $\mathrm{rank}(\mathbf{A})$ vilket också är lika med antalet pivåpositioner i $\mathbf{A}$.

Om $\mathbf{A}$ är en $m \times n$-matris gäller också att

$$\mathrm{rank}(\mathbf{A}) + \dim(\mathrm{Nul}(\mathbf{A})) = n.$$

Sats: Inverterbarhet

Låt $\mathbf{A}$ vara en $n \times n$-matris. Då är de följande påståendena ekvivalenta, dvs om ett är sant så är alla sanna.

a. $\mathbf{A}$ är inverterbar.
b. $\mathbf{A}$ är radekvivalent med $\mathbf{I}_n$.
c. $\mathbf{A}$ har n pivåpositioner.
d. Den homogena ekvationen $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har endast den triviala lösningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
e. Kolonnerna i $\mathbf{A}$ är linjärt oberoende.
f. Avbildningen $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\,\mathbf{x}$ är *ett-till-ett* (one-to-one).
g. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ har lösning för varje $\mathbf{b}$.
h. Kolonnerna i $\mathbf{A}$ spänner upp $\mathbb{R}^n$.
i. Avbildningen $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\,\mathbf{x}$ är *på* (onto).
j. Det finns en matris $\mathbf{C}$ så att $\mathbf{CA} = \mathbf{I}_n$.
k. Det finns en matris $\mathbf{D}$ så att $\mathbf{AD} = \mathbf{I}_n$.
l. $\mathbf{A}^T$ är inverterbar.

Sats: Inverterbarhet, forts

Låt $\mathbf{A}$ vara en $n \times n$-matris. Då utökar vi listan med de följande ekvivalenta påståendena:

m. Kolonnerna i $\mathbf{A}$ bildar bas för $\mathbb{R}^n$.
n. $\mathrm{Col}(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^n$.
o. $\dim(\mathrm{Col}(\mathbf{A})) = n$.
p. $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = n$.
q. $\mathrm{Nul}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$.
r. $\dim(\mathrm{Nul}(\mathbf{A})) = 0$.
t. $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.