M0031M, Linjär algebra och differentialekvationer

Föreläsning 12

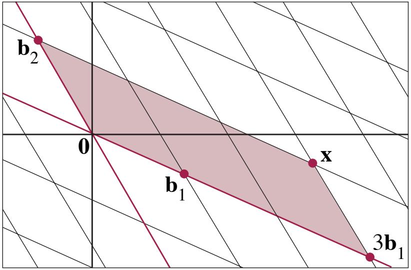
Ove Edlund

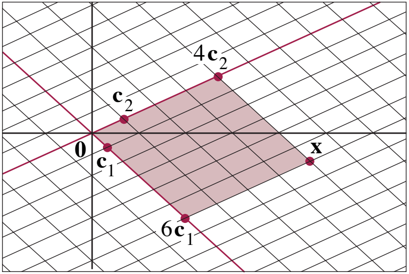
LTU

2016-09-13

Exempel: basbyten

$\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ och $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$ är båda baser i $\mathbb{R}^2$. Figuren nedan visar hur en vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ bildas i de båda baserna:





Uppenbarligen är

$$\mathbf{x} = 3\,\mathbf{b}_1 + 1\,\mathbf{b}_2 \quad \text{och} \quad \mathbf{x} = 6\,\mathbf{c}_1 + 4\,\mathbf{c}_2$$

dvs

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad [\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Koordinatbytesmatris

Sats 15

Om $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$ och $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n\}$ är baser för vektorrummet V, så existerar en $n \times n$-matris $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{\mathbf{P}}$ så att

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} = \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{\mathbf{P}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}.$$

Kolonnerna i $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{\mathbf{P}}$ ges av basvektorerna $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$ uttryckta som $\mathcal{C}$-koordinatvektorer, dvs

$$\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} [\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} & [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}} & \dots & [\mathbf{b}_n]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix}.$$

Matrisen $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{\mathbf{P}}$ ovan, kallas **koordinatsbytesmatrisen**.

Koordinatbytesmatris, forts

Koordinabytesmatrisen $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{\mathbf{P}}$ är inverterbar vilket medför att

$$\left(\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{\mathbf{P}}\right)^{-1}[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$$

alltså gäller

$$\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{\mathbf{P}} = \left(\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{\mathbf{P}}\right)^{-1}.$$

Koordinatbytesmatriser för baser som spänner upp $\mathbb{R}^n$

Om $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ och $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n\}$ är baser för $\mathbb{R}^n$, så kan $\underset{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}{\mathbf{P}}$ beräknas enligt:

$$\left[\, \mathbf{c}_1 \ \mathbf{c}_2 \ \ldots \ \mathbf{c}_n \,\middle|\, \mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \ldots \ \mathbf{b}_n \,\right] \sim \ldots \sim \left[\, \mathbf{I} \,\middle|\, \underset{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}{\mathbf{P}} \,\right]$$